Chapitre XVI

Un bilan mitigé

Imaginée à la fin du XIX^e siècle par le visionnaire Georg Cantor dans le but de répondre à des questions sur l'infini mathématique, spécialement le problème du continu, la théorie des ensembles, lorsque les brumes de sa naissance ont été dissipées au début du XX^e, est apparue comme un possible système fondationnel pour l'ensemble des mathématiques, et ces deux aspects, théorie de l'infini et théorie fondationnelle, *a priori* peu liés, ont entretenu un certain flou sur les buts et les réalisations de la théorie. Si l'on veut tenter d'évaluer le bilan de près de cent cinquante années de recherches (la note fondatrice de Cantor date de décembre 1873), il convient de dissocier clairement les deux enjeux, et c'est ce qui sera fait ci-dessous.

> ▷ *À l'exception des résultats mathématiques mentionnés dans les sous-sections* 3.1 *et* 3.2*, les développements qui suivent comportent une part d'appréciation subjective : issus d'une expérience directe, ils reflètent le point de vue et les opinions dont l'auteur a été le témoin direct au sein de la communauté des théoriciens des ensembles, mais il doit être entendu qu'ils ne sont pas nécessairement objets de consensus, et ne sont pas assénés à la façon dogmatique dont la théorie des ensembles a jadis pâti.* ◁

Bien que l'aspect « théorie de l'infini » soit le plus ancien, c'est aussi celui dont le développement se poursuit aujourd'hui, et on le gardera donc pour la fin. Ce bref chapitre comprend donc trois sections, la section 1 abordant la théorie des ensembles comme théorie des fondements et exposant les malentendus qui semblent avoir souvent obscurci l'analyse. Dans la section 2, on essaie de mettre en perspective les résultats acquis par la théorie et les problèmes qui ont motivé son développement, dressant un bilan évidemment parcellaire et subjectif. Enfin, dans la section 3, on évoque quelques-unes des pistes actuellement explorées et les perspectives qu'elles ouvrent (ou pas) pour des progrès futurs, et notamment la résolution du problème du continu.

Sources et compléments. *De nombreuses informations sur l'histoire de la théorie des ensembles et du groupe Bourbaki se trouvent dans le texte* [91] *d'A. Mathias. Pour les axiomes de forcing et les résultats de la sous-section* 3.1, *on pourra se reporter* à [58, chapitre 37] *et* à [117]. *L'aperçu de la sous-section* 3.2 *se fonde entre autres sur l'exposé de synthèse de W.H. Woodin dans* [120]. *Les textes* [66], [67], *et* [68] *de P. Koellner fournissent également des sources accessibles.*

1. Une accumulation de malentendus

On a vu dans le chapitre III que les ensembles tels qu'axiomatisés par le système ZF(C) fournissent un cadre très riche dans lequel la plupart des objets mathématiques peuvent être représentés. Ce succès remarquable permet d'utiliser les ensembles comme base unique de la construction mathématique, et ramène en particulier l'étude de la cohérence de l'intégralité de l'édifice à celle de la seule théorie des ensembles, donnant à celle-ci un rôle qui semble privilégié. Mais cette vision orientée a rapidement été battue en brèche tant sur le plan théorique par la découverte des théorèmes de limitation, qui ruinent le bénéfice d'une telle réduction, que sur le plan pratique avec l'émergence de systèmes fondationnels alternatifs.

Cette section est articulée en trois sous-sections. Dans la sous-section 1.1, on revient sur les limitations intrinsèques apportées par les théorèmes d'incomplétude de Gödel au bénéfice fondationnel que peut laisser attendre la possibilité de représenter tous les objets mathématiques comme ensembles purs. Dans la sous-section 1.2, on pointe les lacunes des options retenues par N. Bourbaki dans sa présentation des mathématiques, à la fois par l'utilisation dogmatique de ce qui n'est qu'une représentation technique, et par la confusion des niveaux mathématique et métamathématique qui exclut toute la théorie des ensembles au-delà du niveau élémentaire. Enfin, dans la sous-section 1.3, on souligne l'existence de systèmes fondationnels alternatifs, dont le récent programme « Univalent Foundations » orienté vers des mathématiques plus effectives, et on insiste sur la complémentarité d'approches diverses qu'il serait stupide d'opposer les unes aux autres.

1.1. Les espoirs déçus

▶ Résumé.— Les théorèmes de Gödel sapent l'espoir que la théorie des ensembles puisse prouver la cohérence de l'édifice mathématique. ◀

1.1.1.— La théorie des ensembles n'est pas d'abord apparue comme une théorie des fondements, mais comme une tentative visionnaire d'explorer la notion mathématique de l'infini. Née précisément de la découverte par Cantor qu'il doit exister au moins deux espèces d'infini, puis une infinité de telles espèces s'organisant en la suite bien ordonnée des alephs, la conception de Cantor est apparue fondée sur des principes vacillants et vulnérables aux paradoxes comme on l'a expliqué dans la section I.3.

1.1.2.— Mais les intuitions de Cantor se sont révélées prophétiques, et la formalisation de la logique et l'axiomatisation de Zermelo, puis de Zermelo –Fraenkel ont permis d'asseoir la théorie sur des bases solides. Le consensus acquis vers les années 1920 a établi la théorie des ensembles comme l'étude des conséquences du système $\mathsf{ZF(C)}$, faisant d'elle une théorie mathématique comme les autres, formellement comparable à la théorie des nombres ou à l'algèbre, vues comme l'exploration des conséquences de systèmes axiomatiques différents, mais conceptuellement parallèles. Au plan technique, cette théorie des ensembles est une théorie du premier ordre (au sens du chapitre VII), dans laquelle un seul type d'objet est considéré, les ensembles purs, par le biais d'une seule relation binaire, l'appartenance, le système ZF étant une liste infinie mais récursive (c'est-à-dire définie de façon effective) d'axiomes de la logique du premier ordre $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$.

1.1.3.— Comme on l'a expliqué au chapitre III, une fois les ensembles axiomatisés dans le système ZF, il est vite apparu qu'en plus d'un cadre convenable pour l'étude des ensembles purs (ensembles d'ensembles d'ensembles ... à l'exclusion des autres types d'objets mathématiques, y compris les ensembles non purs), ce système permet de *représenter* par des ensembles purs des objets qui, *a priori*, n'en sont pas : nombres entiers (par le truchement des ordinaux finis), fonctions (par le truchement d'ensembles de couples), nombres réels, etc. Pour cela, on a construit des familles d'ensembles purs qui *fonctionnent* exactement comme on s'accorde à considérer que fonctionnent les objets en question, à savoir satisfont les systèmes qui les axiomatisent, par exemple satisfont les axiomes du système de Peano dans le cas des nombres entiers et de leurs opérations arithmétiques. Il apparaît probable que la possibilité de se restreindre sans perte de généralité au seul type des ensembles purs et à la seule relation $\in$ ne figurait pas dans les projets initiaux des précurseurs, surgissant plutôt *a posteriori* comme un « cadeau » offert par la technique au cours de son élaboration.

1.1.4.— On sait qu'à l'époque de ces développements, donc au tournant du XX[e] siècle, existait une quête importante vers les fondements des mathématiques : l'apparition d'objets mathématiques pathologiques, comme les fonctions continues nulle part dérivables ou, un peu plus tard, les décompositions paradoxales de la sphère, tout comme les difficultés nées des paradoxes ensemblistes, avaient rendu urgente une clarification des fondements. En même temps, le développement de la logique et d'une théorie de la démonstration pouvaient laisser espérer la possibilité d'une fondation de l'édifice mathématique comme un système formel dont on pourrait établir la cohérence, de façon constructive : c'est, grossièrement résumé, le *programme de Hilbert* dans les années 1920. Or, pour quiconque se pose la question de la cohérence de l'édifice mathématique, la puissance de la théorie des ensembles à représenter tous les autres types d'objets mathématiques semble garantir à celle-ci un statut très privilégié : pour établir la cohérence de l'ensemble de l'édifice mathématique, il suffit d'établir la cohérence de la seule théorie des ensembles, ce qui semble une réduction magnifique du problème. On comprend dès lors le célèbre aphorisme attribué à Hilbert [1] : « Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen [hat], soll uns niemand vertreiben können ».

1.1.5.— Mais le programme de Hilbert ainsi esquissé a irrémédiablement fait long feu : en montrant qu'il est impossible d'établir la cohérence de tout système formalisable dans une logique du premier ordre et au moins aussi puissant que l'arithmétique de Peano, donc en particulier du système ZF et de ses extensions, les théorèmes de Gödel ont, dès le début des années 1930, ruiné tout espoir de construire un système fondationnel qui prouverait sa propre cohérence et tracé une limite indépassable pour toute théorie des fondements. De ce fait, le bénéfice de la réduction de la totalité de l'édifice mathématique à l'unique théorie des ensembles est en grande partie annulé, puisque la cohérence de ce dernier est, et restera, une question ouverte.

1.2. Dogmes et errances bourbachiques

► Résumé.— La présentation de la logique et de la théorie des ensembles de N. Bourbaki reflète une vision pré-Gödelienne et des malentendus sur l'objet et la nature de la théorie, malheureusement ensuite diffusés à travers les aberrations des mathématiques dites modernes. ◄

1.2.1.— À partir de 1935, et surtout après 1948, date de la sortie des premiers fascicules du livre I, le traité de N. Bourbaki [6] a été un événement considérable dans le monde mathématique. Ce traité peut être vu comme une ébauche de réalisation du programme de Hilbert, au sens où il se propose de donner une exposition de la totalité des mathématiques (de l'époque) sous la forme d'un texte organisé à partir de fondements de logique et de théorie des ensembles et cheminant de façon linéaire et cohérente pour inclure progressivement la plus grande part possible des mathématiques. Les mérites de la démarche de N. Bourbaki sont considérables : élaborer un cadre unifié a requis un niveau de précision dans les définitions et leurs développements qui était inhabituel, et permis d'expliciter des notions auparavant enfouies, par exemple les notions d'entourage et de structure uniforme en topologie générale.

1.2.2.— Néanmoins, au moins deux critiques peuvent être adressées à la présentation des fondements retenue. La première porte principalement sur la forme. N. Bourbaki a choisi de fonder sa construction sur la logique du premier ordre et sur une théorie des ensembles qui est une modeste extension du système ZFC où l'axiome du choix AC est renforcé en le principe

1. « Du paradis que Cantor a créé pour nous, personne ne doit pouvoir nous chasser ».

de choix PC qui assure l'existence d'une fonction de choix sur toute classe définissable (XI.3.1.3). La règle du jeu retenue est de *définir* les uns après les autres les divers types d'objets mathématiques par le biais de leurs représentations ensemblistes. Mises à part les difficultés qu'engendre cette option lorsqu'il s'agit de traiter des aspects géométriques et de parler par exemple de catégories, ce qui peut être jugé regrettable est la position dogmatique adoptée dans cette construction : nulle part il n'est mentionné qu'il ne s'agit que d'une *représentation* des objets rencontrés, oubli malheureux qui a mené bien des lecteurs à croire à une sorte de révélation de la nature profonde, *essentielle*, des objets en question. Que les ensembles $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, et $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ se comportent en tout point comme les entiers 0, 1, et 2 est un intéressant résultat technique, mais il serait navrant de croire que l'égalité $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ en découle comme une vérité révélée — égalité dont le fallacieux pouvoir de fascination est d'autant plus grand qu'avec les conventions syntaxiques assez étranges de [6], l'écriture explicite de l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, certainement jamais tentée, requerrait un nombre astronomique de symboles de base [2].

1.2.3.— La seconde critique porte sur le fond. La position d'unification forcenée adoptée par Nicolas Bourbaki le conduit à ne pas distinguer entre le niveau mathématique (celui des objets mathématiques, donc ici celui des ensembles) et le niveau métamathématique (celui du discours sur les ensembles et de la logique), ce qui revient essentiellement à identifier une formule à la classe des objets qui la satisfont, sans mention d'une structure de référence où l'évaluation se fasse. Envisageable quoique pédagogiquement discutable pour une théorie élémentaire des ensembles, une telle approche exclut toute possibilité de considérer plusieurs modèles de ZFC, et donc elle rend impossible tout développement de la théorie au-delà du niveau élémentaire : pour concevoir qu'une même formule puisse être vraie dans un modèle et fausse dans un autre, il *faut* que la formule soit distincte de son évaluation, c'est-à-dire de son extension. Or, dès les années 1930, quand le théorème de complétude est établi et que commence à se développer l'étude des modèles de ZF, base et condition de toute la théorie ultérieure, l'idée d'un référentiel unique était devenue obsolète, et presque aucun des résultats postérieurs à 1940 ne peut faire sens dans un formalisme où syntaxe et sémantique sont confondus.

> $\triangleright$ *Même si l'objet du traité de Bourbaki est de fournir un cadre de départ et pas de s'intéresser aux développements de la théorie des ensembles, adopter un point de vue qui exclut toute possibilité en ce sens paraît une option regrettable, surtout lorsqu'il s'agit d'une théorie à qui on fait jouer un rôle fondationnel privilégié. On peut s'interroger sur les raisons qui ont poussé les auteurs de* [6] *à*

2. A. Matthias a malicieusement calculé dans [90] que l'écriture complète de $\{\emptyset\}$, donc de la représentation de l'entier 1, demanderait 4.523.659.424.929 symboles et 1.179.618.517.981 liens dans le formalisme de la première édition (avec un symbole primitif pour les couples), et un nombre encore beaucoup plus élevé dans celui des éditions ultérieures, où les couples sont définis comme paires de paires.

ces options malheureuses [89]. *Si ces options étaient raisonnables dans les années 1920, elles étaient résolument anachroniques lorsqu'elles ont été adoptées à la fin des années 1940. À cette époque, les théorèmes d'incomplétude étaient connus — ils sont du reste mentionnés dans l'appendice historique de Bourbaki, qui donc en avait une connaissance théorique mais n'avait apparemment pas mesuré les conséquences épistémologiques qui en découlaient. De surcroît, des systèmes fondationnels alternatifs à la théorie des ensembles comme le λ-calcul avaient déjà été développés et auraient pu convaincre N. Bourbaki d'adopter une présentation moins dogmatique, mais il est à craindre qu'ils soient restés alors ignorés.* ◁

1.2.4.— Une bien regrettable conséquence des choix malheureux de Nicolas Bourbaki quant à la logique et la théorie des ensembles est que l'autorité scientifique indiscutable et justifiée de l'auteur et les bénéfices visibles de son entreprise totalisante, en des temps volontiers orientés vers le structuralisme, ont donné à son traité un pouvoir de fascination dont les répercussions sont allées bien au-delà du cercle des spécialistes. Émerveillés par la beauté formelle d'un édifice fondé sur les seuls ensembles (purs) et induits en erreur quant au sens profond de la représentation des objets par ces ensembles, de nombreux pédagogues ont pensé que l'enseignement des mathématiques serait facilité si, là aussi, on commençait par ce qu'ils imaginaient être les objets premiers. S'il est facile aujourd'hui de moquer les dérives de ces « mathématiques modernes » où l'on avait voulu substituer les ensembles aux nombres entiers comme premiers objets d'étude, cela restera longtemps l'illustration des malentendus pouvant naître d'une lecture superficielle de ce qui, au départ, était un remarquable succès scientifique.

1.2.5.— Le plus navrant est qu'une fois ces errements dépassés, la théorie des ensembles, un temps vénérée au-delà de toute raison et qui n'en demandait pas tant, a par contrecoup été rejetée et durablement oubliée, au point qu'aujourd'hui elle a pratiquement disparu de tous les cycles d'enseignement dans le secondaire comme dans le supérieur. Il faut espérer que le balancier finira par revenir et que la théorie des ensembles trouvera alors dans le corpus mathématique la place qu'elle mérite en tant que théorie de l'infini mathématique, ni plus, ni moins.

1.3. Un système fondationnel parmi d'autres

▶ Résumé.— Sans diminuer la pertinence de la théorie des ensembles comme outil d'exploration de l'infini, l'existence de systèmes fondationnels alternatifs interdit une attitude dogmatique et monopoliste. ◀

1.3.1.— Dès les années [3] 1940, d'autres systèmes fondationnels avaient été proposés, dont l'existence même aurait dû ruiner toute prétention au monopole pour la théorie des ensembles. Déjà évoquées au chapitre I comme

3. Et même bien avant : fondée sur des combinateurs qui sont essentiellement des fonctions, la logique combinatoire proposée en 1924 par M. Schönfinkel est un précurseur direct du λ-calcul, et, de façon plus détournée, de la théorie des catégories, voir [47].

un moyen d'échapper au paradoxe de Russell, les théories de types, et le *lambda-calcul* (ou λ-calcul) qui s'y rattache, peuvent être vues comme des approches des fondements où « tout est fonction », ou, plutôt, « tout est calcul ». La base du système est le type « fonction » et les deux opérations d'appliquer une fonction à son argument et d'abstraire une fonction à partir d'un terme décrivant son évaluation. Prédicatif ou non suivant les variantes, le λ-calcul s'est révélé particulièrement adapté pour représenter les objets récursifs et, via l'isomorphisme de Curry–Howard, pour modéliser les déductions de la logique intuitionniste, qui est analogue à la logique classique privée de l'axiome du tiers exclu. Pertinent pour modéliser les aspects géométriques du calcul, il est certainement bien plus adapté que la théorie des ensembles pour les mathématiques constructives et l'informatique théorique.

$\triangleright$ *Dans le lambda-calcul (du second ordre), l'entier n est représenté par l'itération n fois d'une fonction*[4] *: ainsi,* 3 *est représenté par la fonction* $\lambda f \lambda x f(f(f(x)))$*. L'intérêt de pointer cette formule ici est d'illustrer une fois de plus la distinction entre essence et représentation : comment croire à l'« égalité »* $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ *plutôt qu'à la non moins légitime « égalité »* $3 = \lambda f \lambda x f(f(f(x)))$*, que l'on peut même juger bien plus intuitive ?* $\triangleleft$

1.3.2.— Dans un autre ordre d'idées, la *théorie des catégories* est une approche où « tout est diagramme ». Elle place la notion de morphisme et la composition des flèches à la base de la construction. Un contexte catégorique fournissant souvent un cadre adéquat pour développer une théorie des types, il peut y avoir des convergences techniques avec la théorie des types. Là encore, le point de vue n'est pas exactement comparable à celui de la théorie des ensembles, mais on peut définir une très grande diversité d'objets mathématiques comme catégories, et certains objets dérivés comme les topos [78] offrent un cadre conceptuel alternatif à la théorie des ensembles et à certaines méthodes comme le forcing du chapitre XII.

1.3.3.— Récemment, le programme de fondation univalente (« Univalent Foundations ») [55, 113, 13] s'est proposé de développer un nouveau système fondationnel à partir d'une théorie homotopique des types d'ordre supérieur et d'une nouvelle axiomatisation de l'égalité mathématique, un des bénéfices de cette approche particulièrement prometteuse — complémentaire et nullement exclusive de la théorie des ensembles [29] — étant son adaptation à la démonstration assistée par ordinateur (qui contre-balance son inadaptation à l'exploration de l'infini).

1.3.4.— Comme dans la sous-section IV.3.2 lors de la discussion sur l'opportunité d'adopter ou non l'axiome du choix, il n'y a pas lieu d'opposer ces diverses approches, dont chacune est adaptée à certains aspects d'un édifice mathématique divers et complexe. La théorie des ensembles permet

4. Une idée déjà présente chez Wittgenstein : « *Die Zahl ist der Exponent einer Operation* » (« le nombre est l'exposant d'une opération »), [115].

une exploration frontale de la notion d'infini que les autres approches ne semblent pouvoir atteindre, tandis que les théories de types sont mieux adaptées pour étudier les questions d'effectivité que l'option d'imprédicativité de la théorie des ensembles tend à masquer. De même, les théories de catégories semblent plus aptes à prendre en compte des phénomènes géométriques où la théorie des ensembles reste pataude. Il y a donc complémentarité davantage qu'antinomie entre des approches dont aucune n'a vocation à éclipser les autres, et entre lesquelles, du reste, divers ponts ont été établis. La question est surtout celle de l'aspect des mathématiques que l'on souhaite privilégier : si l'on ne s'intéresse qu'aux objets effectifs et aux preuves d'existence constructives, des systèmes comme le lambda-calcul ou les fondations univalentes sont certainement plus pertinents ; à l'opposé, si l'on veut explorer tout le spectre mathématique jusqu'aux bords de la contradiction, et sans se soucier d'effectivité, typiquement explorer l'infini, alors la théorie des ensembles est probablement un meilleur outil. En revanche, il est toujours opportun de se rappeler qu'il n'y a ni nécessité, ni bénéfice à poser un dogme « tout est ensemble », daté et injustifié.

2. Une théorie de l'infini encore incomplète

La théorie des ensembles est une théorie de l'infini mathématique. Sa formalisation et son développement tout au long du XX$^{\text{e}}$ siècle ont été nourris par la volonté d'avancer sur des problèmes ouverts mettant en jeu l'infini, au premier rang desquels le problème du continu. Au moment de conclure ce texte, on peut revenir sur les objectifs initiaux de la théorie et se demander si les problèmes qui l'ont motivée ont été résolus de façon satisfaisante, donc, en un sens, si la théorie a rempli la mission qui lui était assignée.

▷ *Les remarques qui suivent ne prétendent pas constituer une évaluation : oser discuter des réalisations d'une théorie qui a mobilisé tant de grands mathématiciens serait outrecuidant et déplacé. Pour autant, il n'est pas interdit d'avoir un regard critique au moins sur les points qui ont été abordés ici. Clairement, il ne s'agit que d'une vue partielle et biaisée : comme on le voit par exemple en feuilletant* [34]*, la partie de la théorie abordée dans ce livre n'est qu'un fragment réduit du corpus énorme de résultats accumulés depuis des décennies et, en particulier, presque aucun résultat postérieur à 1990 n'a été mentionné. Même si les résultats présentés ont été choisis en fonction de leur importance supposée* (*et de leur accessibilité*)*, il faut donc garder à l'esprit qu'il est impossible de fonder un bilan équitable sur un échantillon aussi limité.* ◁

La section est divisée en trois sous-sections. Dans la sous-section 2.1, on souligne que la théorie des ensembles a remporté des succès magnifiques dans l'exploration de l'infini mathématique. Dans la sous-section 2.2, on constate qu'à l'instar du problème du continu beaucoup de questions restent néanmoins ouvertes. Enfin, dans la sous-section 2.3, on doit reconnaître que les interactions de la théorie des ensembles avec les autres branches des mathématiques restent limitées.

2.1. Des réponses

▶ Résumé.— Outre l'indépendance de HC et AC vis-à-vis de ZF, des progrès remarquables ont été obtenus avec DP et l'analyse de $H_{\aleph_1}$. ◀

2.1.1.— Une fois un consensus atteint sur la pertinence du système ZF (ou ZFC) comme axiomatisation de la notion d'ensemble, décider si une propriété Φ des ensembles est vraie consiste en premier lieu à se demander s'il existe une preuve ou une réfutation de Φ à partir de ZF. La *première* question face au problème du continu et à l'hypothèse du continu qui est une des réponses possibles à ce problème est de se demander si ZF(C) prouve ou réfute HC. À ces questions, la théorie des ensembles a apporté des réponses complètes : comme on l'a établi dans les chapitres XI et XII, pour peu que le système ZF ne soit pas contradictoire — ce qui, par les théorèmes d'incomplétude de Gödel, reste inaccessible à la démonstration — il ne prouve ni ne réfute HC.

2.1.2.— De même, il est acquis que l'axiome du choix, longtemps objet de discussions acharnées, n'est ni prouvé ni réfuté par ZF, ce qui garantit aux mathématiciens désireux de l'utiliser l'innocuité de son usage : plus encore que pour HC, pour laquelle on aimerait une réponse plus précise, le résultat sur AC est un succès qui clôt la question initialement posée.

2.1.3.— Quoique restant largement moins connus, les résultats sur la structure des sous-ensembles projectifs de l'espace de Baire ω^ω peuvent être jugés plus impressionnants encore. Il ne paraît pas déplacé de qualifier d'admirable le long processus évoqué au chapitre XV par lequel une analyse fondée sur une accumulation de résultats non triviaux a progressivement mené à identifier la détermination projective comme une nouvelle propriété de base des ensembles et à l'intégrer au système axiomatique de référence. Tous ces résultats sont à coup sûr des succès de la théorie des ensembles : grâce à celle-ci, il ne fait pas de doute que l'on en sait beaucoup plus sur le monde de l'infini aujourd'hui qu'il y a un siècle. En particulier, l'identification d'un axiome faisant consensus et, suivant XV.3.3.7, fournissant une description optimale de $H_{\aleph_1}$, c'est-à-dire du monde des ensembles jusqu'à la cardinalité $\aleph_0$ désormais incluse, est un succès remarquable.

2.2. Des questions qui résistent

▶ Résumé.— La théorie a, pour le moment, échoué à résoudre nombre des problèmes sur l'infini qui ont motivé son développement. ◀

2.2.1.— Il est clair qu'au passif du bilan s'inscrit le fait qu'en dépit des résultats magnifiques obtenus de nombreuses questions restent ouvertes, au premier rang desquelles le problème du continu, dont on a abondamment parlé. Il en est de même pour d'autres questions soulevées au début du XX$^{\text{e}}$

siècle : à la notable exception des questions concernant les sous-ensembles projectifs de $\mathbb{R}$, qui peuvent désormais être légitimement considérées comme résolues, on peut par exemple citer le problème de Souslin, étudié dans la sous-section XI.3.2, ou encore le problème de Borel.

▷ *Le problème de Borel demande si tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ (ou de ω^ω) tel que, pour toute suite de réels positifs $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$, il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant $|b_n - a_n| = \varepsilon_n$ pour tout n et $A \subseteq \bigcup_n [a_n, b_n]$, est nécessairement dénombrable. Le seul résultat obtenu pour l'instant est une indépendance par rapport à* ZFC*, dont on a compris qu'elle n'est qu'une première étape, et pas une solution complète : au risque de répéter les arguments de la sous-section* XII.3.4*, insistons une fois de plus sur le fait que la signification de ces résultats d'indépendance n'est* pas *que ces problèmes sont insolubles, ou mystérieusement ni vrais, ni faux, mais que notre connaissance de l'infini est encore parcellaire, et que seule une analyse approfondie du monde des ensembles permettra d'obtenir, sur la base des théorèmes établis, un consensus sur une base axiomatique enrichie permettant de résoudre les problèmes en question.* ◁

2.2.2.— Le récit du chapitre XV trace la voie pour une suite du développement fondée sur une approche incrémentale. Comme on l'a expliqué dans la sous-section XV.3.3, l'analyse des sous-ensembles projectifs de ω^ω est essentiellement celle de la structure $(H_{\aleph_1}, \in)$ des ensembles héréditairement finis ou dénombrables, qui inclut et fait suite à celle de $(H_{\aleph_0}, \in)$ — alias $(V_\omega, \in)$, alias l'arithmétique de Peano — qui est le monde du fini. La question fondamentale suivante est l'exploration du monde de la cardinalité $\leqslant\aleph_1$, qui peut être énoncée comme

Objectif.— *Analyser la structure* $(H_{\aleph_2}, \in)$.

2.2.3.— Dans une large mesure, il s'agirait de développer une description fine de l'ensemble $\mathfrak{P}(\omega_1)$ analogue à celle obtenue au chapitre XV pour $\mathfrak{P}(\omega)$ ou ω^ω. Cette question reste aujourd'hui largement ouverte. On indiquera dans la section 3 quelques pistes aujourd'hui explorées.

▷ *L'ensemble $\mathfrak{P}(\omega)$ est inclus dans $H_{\aleph_1}$, donc est une classe pour la structure $(H_{\aleph_1}, \in)$. L'hypothèse du continu équivaut alors à la satisfaction de la formule $\exists X\, \forall a\, (a \subseteq \omega \Leftrightarrow a \in X)$ dans $(H_{\aleph_2}, \in)$: autrement dit, quelle que soit la valeur du continu, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de α pour laquelle on a $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, on peut lire dans la structure $(H_{\aleph_2}, \in)$ la valeur de vérité de* HC*. Il en résulte qu'une analyse suffisamment complète de $(H_{\aleph_2}, \in)$* doit *spécifier cette valeur de vérité. Ainsi, dans tous les cas, l'étape suivante de l'exploration de l'univers des ensembles devra inclure une décision quant à* HC. ◁

2.2.4.— Mais, pour incomplète que la théorie des ensembles reste encore, aucun argument raisonnable, et encore moins aucun théorème ne vient justifier l'idée que la résistance opposée par des questions ouvertes comme le problème du continu soit le signe que ces questions sont vides de sens profond et purement formelles, comme l'ont parfois affirmé sans justification des mathématiciens peut-être mal informés [82]. Pour terminer par une citation de W.H. Woodin [118] [5] :

> « *There is a tendency to claim that the Continuum Hypothesis is inherently vague and that this is simply the end of the story. But any legitimate claim that CH is inherently vague must have a mathematical basis, at the very least a theorem or a collection of theorems. My own view is that the independance of CH from ZFC, and from ZFC together with large cardinal axioms, does not provide this basis* [.../...] *For me, the independence results for CH simply show that CH is a difficult problem.* »

2.3. Des interactions, mais souvent indirectes et limitées

► Résumé.— Les applications directes de la théorie des ensembles mettent souvent en jeu des objets éloignés du cœur des mathématiques. ◄

2.3.1.— Une théorie mathématique est souvent évaluée à l'aune des applications qu'elle a apportées dans d'autres branches de la discipline. De ce point de vue, il est difficile de masquer que les applications de la théorie des ensembles existent, mais sont souvent jugées marginales et limitées, ne mettant en jeu que des objets éloignés de ce qui est considéré comme le cœur de la discipline. Dans les domaines autres que la topologie générale ou l'algèbre universelle, on peut penser que les applications *directes* de la théorie des ensembles restent décevantes par rapport à la trop grande ambition prévalant un temps.

2.3.2.— Certes, comme on l'a vu au chapitre IV, les applications de l'axiome du choix sont nombreuses et, en établissant définitivement la non-contradiction relative de celui-ci, la théorie des ensembles a tiré une épine du pied de nombreux mathématiciens. De la même façon, on peut dire que le nouveau consensus établi autour de l'axiome DP, donc de l'introduction des grands cardinaux au moins jusqu'au niveau des cardinaux de Woodin, a définitivement légitimé les univers de Grothendieck [49], qui, en termes de consistance, requièrent un peu plus que ZFC, mais pas davantage que ZFC+« il existe une classe propre de cardinaux inaccessibles », et de ce fait légitimé toutes les démonstrations qui les utilisent formellement, comme celle [6] du théorème de Fermat.

5. « Il y a une tendance à affirmer que l'hypothèse du continu est intrinsèquement vague et que c'est la fin de cette histoire. Mais toute affirmation légitime que HC est intrinséquement vague doit avoir une base mathématique, à tout le moins un théorème ou une collection de théorèmes. Ma propre vue est que l'indépendance de HC par rapport à ZFC, et à ZFC complété par les axiomes de grands cardinaux, ne fournit pas une telle base [.../...] Pour moi, les résultats d'indépendance pour HC montrent simplement que HC est un problème difficile. »

6. Même si, dans ce dernier cas, on peut très probablement revenir au cadre de ZFC par des arguments de réflexion.

2.3.3.— Pour autant, il ne s'agit pas d'applications directes de la théorie et, de fait, il n'existe qu'assez peu de telles applications directes, au moins en dehors de la topologie générale et de l'analyse fonctionnelle. Typique de ce point de vue est l'hypothèse du continu : problème central de la théorie, placé au premier rang de la liste des vingt-trois problèmes de Hilbert pour le XX^e siècle, cette conjecture a un nombre limité d'applications concrètes hors de la théorie des ensembles et il existe (pour le moment) peu de questions que l'absence ou la présence d'une cardinalité intermédiaire entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ résout directement.

▷ *Deux exemples d'applications non directement combinatoires de* HC *sont l'existence d'une bijection involutive de* $\mathbb{R}$ *sur lui-même qui échange les parties maigres et les parties de mesures nulle* [97, chapitre 19]*, ainsi que celle de mesures médiales de Christensen et Mokobodsky sur* $\mathfrak{P}(\omega)$ (*« medial limits »*) [74]. *De façon générale, de nombreuses conséquences de* HC (*et d'innombrables résultats d'indépendance par rapport à* ZFC) *apparaissent en topologie générale* [73]. *Un des bénéfices des travaux en théorie des ensembles a aussi été de mieux distinguer entre* HC *et ses applications, qui sont souvent celles de l'axiome de Martin.* ◁

2.3.4.— Même dans les domaines où les applications sont plus nombreuses, comme la topologie générale, on peut penser que les résultats mettent souvent en jeu des espaces gigantesques ou pathologiques : structures non dénombrables, espaces non métrisables, *etc.*, qui restent relativement éloignés des objets mathématiques les plus usuels.

2.3.5.— Il existe un important courant de recherche établissant que l'usage de la théorie des ensembles est non seulement utile, mais même nécessaire pour établir certains résultats. Cousins du résultat de VIII.4.4.8 sur la non-prouvabilité du théorème de Goodstein à partir de l'arithmétique de Peano, ces résultats appartiennent au vaste programme dit de « Reverse Mathematics » [107] visant à établir le cadre axiomatique minimal pour tel ou tel énoncé.

▷ *Un exemple fameux est le résultat de H. Friedman établissant dès 1968, donc sept ans avant le théorème de Martin* (XV.1.1.6)*, que la détermination borélienne* $\mathsf{Det}(\boldsymbol{\Delta}^1_1)$ *ne peut être établie dans le système de Zermelo* Z*, l'existence du grand cardinal* $\aleph_1$ (*donc le schéma de remplacement*) *étant inévitable pour couvrir toute la hiérarchie des boréliens* [36]. ◁

2.3.6.— Sur ce modèle, H. Friedman a fourni de nombreux énoncés, en général à saveur combinatoire et souvent réminiscents du théorème de Ramsey, dont il démontre que la preuve requiert au moins le cadre de ZFC, et ou même celui de ZFC augmenté d'axiomes de grand cardinal [37].

▷ *Suivant* [38]*, une des formes les plus épurées s'énonce en termes d'ensembles de vecteurs à coordonnées rationnelles bornées. On note* $\mathbb{Q}^+_{\leqslant n}$ *l'ensemble* $\mathbb{Q}\cap[0,n]$*, et on considère l'énoncé*

$$\Phi_{n,p} : \textit{Tout sous-ensemble de } (\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^{2p} \textit{ inclut un } \text{carré maximal}, \qquad (\#1)$$

à savoir que, pour tout $\mathcal{S} \subseteq (\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^{2p}$, *il existe* $A \subseteq (\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^p$ *satisfaisant* $A \times A \subseteq S$ *et maximal vis-à-vis de cette propriété. Pour tous* n, p, *l'énoncé* $\Phi_{n,p}$ *est prouvable, sans même avoir à utiliser le lemme de Zorn car* $(\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^p$ *est dénombrable. On introduit alors deux relations d'équivalence sur* $(\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^p$ *: on note* $\vec{x} \equiv \vec{y}$ *pour* $(\vec{x}, <) \cong (\vec{y}, <)$, *c'est-à-dire si* $x_i < x_j$ *équivaut à* $y_i < y_j$, *et* $\vec{x} \equiv^+ \vec{y}$ *si on a* $\vec{x} \equiv \vec{y}$ *et, de plus, si* $x_i \neq y_i$ *entraîne* $x_j \in \mathbb{N}$ *et* $y_j \in \mathbb{N}$ *pour* $j \geqslant i$. *On déclare que* X *est* $\equiv$-saturé *si la conjonction de* $\vec{x} \in X$ *et* $\vec{y} \equiv \vec{x}$ *implique* $\vec{y} \in X$, *et on considère l'énoncé*

$$\Phi^{\text{sat}}_{n,p} : \textit{Tout sous-ensemble } \equiv\textit{-saturé de } (\mathbb{Q}^+_{\leqslant n})^{2p} \textit{ inclut un carré } \equiv^+\textit{-saturé maximal,} \qquad (\#2)$$

qui est un raffinement direct de (#1). ◁

Proposition (théorème de Friedman).— *L'énoncé* $\Phi^{\text{sat}}_{16,16}$ *est prouvable à partir de* ZFC+« *il existe un cardinal mesurable* », *mais pas à partir de* ZFC.

▷ *L'hypothèse de grand cardinal utilisée est l'existence d'un cardinal « ineffable », qui est le renforcement de la définition d'un cardinal faiblement compact* (XIII.1.2.5) *par la propriété de partition* $\kappa \to (\kappa)^2_2$ *dans laquelle on exige que l'ensemble homogène ait non seulement la cardinalité* κ *mais aussi soit stationnaire sous* κ, *ce qui est facilement réalisable à partir d'un cardinal mesurable. Le fait que* ZFC *ne prouve pas* $\Phi^{\text{sat}}_{16,16}$ *est établi en construisant un modèle* (M, E) *de* ZFC *à partir d'un carré* $\equiv^+$*-saturé maximal tel que fourni par* $\Phi^{\text{sat}}_{16,16}$. ◁

2.3.7.— D'une virtuosité technique époustouflante, ces résultats peuvent être présentés comme des arguments établissant le caractère inévitable de la théorie des ensembles. En même temps, dans la mesure où les énoncés mis en jeu, quoique syntaxiquement très simples, ne s'insèrent pas dans des corpus existants, ils restent relativement isolés et méconnus. Il en est de même du théorème de Goodstein (II.4.2.4), qui reste marginal, sinon suspect, en arithmétique.

▷ *Le fait que la fonction de Goodstein donnant l'indice où la valeur* 0 *est atteinte prenne pour* $n = 4$ *une valeur énorme, puis pour* $n \geqslant 5$ *des valeurs tellement grandes qu'elles échappent à toute possibilité de détermination pratique peut donner le sentiment que la propriété des nombres entiers exprimée par le théorème n'est pas du même type que les énoncés arithmétiques plus conventionnels — et en tout cas que ceux auxquels les théoriciens des nombres s'intéressent en priorité.* ◁

2.3.8.— Au-delà des applications précédentes de la théorie des ensembles, où l'usage de la théorie peut être démontré inévitable, il existe aussi des applications *indirectes* provenant plutôt des outils et des intuitions que le développement de la théorie a apportés. Un exemple typique dans cette direction est constitué par les propriétés combinatoires des tables de Laver, en particulier le comportement asymptotique des périodes, détaillées au chapitre XIV et dont on a mentionné la possibilité de très spéculatives applications en topologie de basse dimension.

▷ *Il n'existe pour le moment aucun indice suggérant que le cadre de* ZFC *— ou même de* PA_1 *— ne suffit pas pour établir ces propriétés mais, quoi qu'il advienne, il restera toujours que c'est l'étude par R. Laver des itérations de plongements élémentaires qui aura permis de découvrir les énoncés en question et d'établir leur plausibilité. On a signalé dans la sous-section* XIV.3.4 *que la décidabilité du problème de mot pour la loi d'autodistributivité est un autre exemple du même type : la découverte ultérieure d'une preuve alternative n'utilisant pas les grands cardinaux et des applications auxquelles celle-ci a mené dans l'étude des groupes de tresses d'Artin* [16, 18] *ne diminue en rien l'importance de la théorie des ensembles dans ce cas.* ◁

2.3.9.— Suivant le même schéma, l'axiome du choix, outre les multiples conséquences directes qu'il apporte, s'est souvent révélé à l'origine de développements indirects non anticipés, mais qui n'auraient peut-être pas existé sans lui.

▷ *Un exemple typique est l'émergence de la notion de groupe moyennable et de notions dérivées comme la propriété* (T) *de Kazhdan, aujourd'hui centrales en théorie géométrique des groupes : toutes sont issues des décompositions paradoxales de Banach–Tarski* (IV.2.4.3). *Ce cas est fondamental comme illustration de l'imprédictibilité des retombées et de la perte qu'il y aurait à ne considérer que des axiomes faisant consensus : même si, au départ, les décompositions paradoxales de la sphère paraissaient* (*et continuent de paraître*) *pathologiques, c'est en abstrayant de leur étude un contenu combinatoire sans lien avec l'axiome suspect, en l'occurrence les propriétés d'équidécomposabilité du groupe libre de rang* 2*, que l'on a vu émerger des notions nouvelles insoupçonnées. Signalons également, comme autre héritage indirect des discutées décompositions paradoxales, les résultats combinatoires parfaitement constructifs isolés par R. Dougherty et M. Foreman dans leur solution du problème de Markiewicz sur les décompositions paradoxales de la sphère en pièces possédant la propriété de Baire* [23]. ◁

Même s'il faut bien reconnaître que de telles applications indirectes restent, pour le moment, assez rares et isolées, on peut penser qu'elles sont souvent plus convaincantes que les applications directes, et pas du tout affaiblies par le fait que les hypothèses ensemblistes de départ n'y soient pas formellement nécessaires.

2.3.10.— Au total, aussi superficielles et éparpillées que soient celles-ci, la collection des remarques précédentes suggère un bilan plutôt mitigé, aux antipodes des attentes déraisonnables que le fantasme d'une théorie du grand tout omniprésente aurait pu susciter, où la théorie des ensembles apparaît comme assez isolée et cantonnée à l'exploration de questions fascinantes mais souvent perçues comme hors du cœur des mathématiques parce que les objets qu'elles mettent en jeu sont soit très grands, soit très compliqués, et souvent éloignés des centres d'intérêt les plus usuels. En revanche — et c'est un lieu commun, mais étayé par des exemples concrets — son développement fournit des intuitions novatrices et mène à des applications inattendues qui n'auraient peut-être pas vu le jour sans elle, et qui, à ce titre au moins, plaident indubitablement en sa faveur.

3. Quelques pistes

Comme on l'a dit dans l'introduction, ce texte ne vise qu'à être une introduction à la théorie des ensembles, loin de toute visée à l'exhaustivité. En particulier, quasiment tous les résultats développés dans les chapitres précédents sont antérieurs à 1990. On indique pour conclure quelques résultats plus récents, en particulier autour du problème du continu, résolument central dans la théorie et encore ouvert à ce jour.

▷ *On ne saurait trop insister sur le caractère superficiel et incomplet de ce qui suit : il est bien sûr impossible d'évoquer en quelques pages les résultats accumulés de trente années de recherche, c'est-à-dire depuis les théorèmes de Martin–Steel et Woodin sur la détermination projective.* ◁

Deux pistes seront évoquées, dans une large part divergentes et entre lesquelles l'avenir arbitrera. Dans la sous-section 3.1, on mentionne une approche qui peut être qualifiée de maximaliste visant à analyser la structure $(H_{\aleph_2}, \in)$ — la première donc qui ne soit pas maîtrisée après les résultats du chapitre XV — par le biais d'axiomes qui en donnent une vision « algébriquement close ». Dans la sous-section 3.2, on décrit une approche minimaliste visant au contraire à identifier une éventuelle contrepartie du modèle $\boldsymbol{L}$ compatible avec les grands cardinaux et, de ce fait, susceptible de fournir un cadre de référence suffisamment canonique.

3.1. Absoluité générique et axiomes de forcing

▶ Résumé.— Les approches visant à une absoluité générique de $H_{\aleph_2}$, en particulier les versions fortes de l'axiome de Martin, penchent vers la négation de HC. ◀

3.1.1.— On a vu dans la sous-section XV.3.3 que l'un des bénéfices de l'axiome de détermination projective DP est de garantir que les propriétés de la structure $(H_{\aleph_1}, \in)$, c'est-à-dire du monde des ensembles finis ou dénombrables, sont invariantes par extension générique (c'est-à-dire par forcing). Une base naturelle pour continuer l'exploration est donc de rechercher de nouveaux axiomes A fournissant un résultat comparable pour la structure $(H_{\aleph_2}, \in)$, donc tels que ZFC+DP+A prouve un résultat d'absoluité générique pour $(H_{\aleph_2}, \in)$. En particulier, puisque, suivant la discussion de 2.2.3, l'hypothèse du continu se code au niveau de $H_{\aleph_2}$, tout axiome A de ce type devrait, dans un sens ou l'autre, décider HC.

3.1.2.— Or, ainsi qu'il est implicite depuis les premiers temps de la théorie du forcing, aucun axiome de grand cardinal ne peut entraîner l'absoluité générique pour $H_{\aleph_2}$, et il faut considérer d'autres familles d'hypothèses.

▷ *Pour briser* HC*, il suffit d'ajouter* $\aleph_2$ *sous-ensembles à* ω*, ce qui peut se faire avec un ensemble de forcing de cardinal* $\aleph_2$ (XII.2.2.2)*. Or, par construction, un tel petit forcing préserve les grands cardinaux. Si* A *est un axiome de grand cardinal et si* $\boldsymbol{M}$ *est un modèle de* A+HC*, on peut donc toujours construire une extension générique de* $\boldsymbol{M}$ *satisfaisant* A+¬HC*, et* A *ne peut rendre ni* HC*, ni donc les propriétés de* $(H_{\aleph_2}, \in)$*, invariantes par forcing.* ◁

3.1.3.— Depuis les années 1970, une autre famille d'axiomes naturels est apparue, les *axiomes de forcing*. Il s'agit d'énoncés affirmant l'existence d'ensembles (faiblement) génériques pour diverses notions de forcing.

▷ *On peut voir un axiome de forcing comme un principe d'absoluité générique partiel. Si un résultat d'absoluité générique vaut pour un fragment* H *d'un modèle* $\boldsymbol{M}$*, toute propriété de* H *qui peut être forcée par un ensemble de conditions éligible est satisfaite dans* $\boldsymbol{M}$ *puisque, satisfait dans une extension générique de* $\boldsymbol{M}$*, il doit donc être satisfait dans* $\boldsymbol{M}$ *par absoluité générique. Cela rappelle la notion de clôture algébrique : un corps* K *est algébriquement clos s'il contient* déjà *tous les éléments algébriques au-dessus de* K*, de sorte que passer à une nouvelle extension algébrique est sans effet. De même, si un modèle* $\boldsymbol{M}$ *de* ZFC *satisfait un axiome de forcing* A*, alors* $\boldsymbol{M}$ *satisfait* déjà *toutes les propriétés qui pourraient être ajoutées par une notion de forcing couverte par* A*. Tout comme le caractère algébriquement clos pour les corps, les axiomes de forcing affirment une sorte de maximalité pour les modèles qui les satisfont.* ◁

3.1.4.— Le premier axiome de forcing est l'axiome de Martin $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$, affirmant que, si $\mathcal{D}$ est une famille de $\aleph_1$ ensembles denses dans un ordre partiel vérifiant la condition d'antichaîne dénombrable, alors il existe un ensemble rencontrant chacun des ensembles de $\mathcal{D}$. On a vu dans la sous-section XII.3.2 la consistance de $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$ avec ZF+¬HC. La théorie du forcing itéré conduit à considérer diverses extensions de $\mathsf{MA}_{\aleph_1}$, en particulier l'axiome *de forcing propre* PFA [106], où la condition d'antichaîne dénombrable est relâchée en une restriction aux ordres partiels *propres*, une condition plus faible.

▷ *On a vu en* XII.3.2.3 *que l'axiome de Martin peut s'énoncer en termes topologiques comme une forme forte du théorème de Baire. Il en est de même pour l'axiome* PFA. ◁

3.1.5.— Dans [35], M. Foreman, M. Magidor et S. Shelah ont identifié la classe maximale d'espaces localement compacts pour laquelle une forme forte du théorème de Baire n'est pas *a priori* contradictoire :

Définition (axiome MM).— L'*axiome de Martin maximum* MM est l'assertion : « Si X est un espace localement compact dont l'algèbre des ouverts réguliers préserve la stationnarité [7], alors toute intersection de $\aleph_1$ ouverts denses de X est dense ».

▷ *Comme pour* DP*, une question préalable en vue de la recevabilité de* MM *comme plausible description de l'univers est celle de sa compatibilité avec l'existence de grands cardinaux. Celle-ci est acquise : il a été montré dans* [35] *que, s'il existe un cardinal supercompact, alors l'axiome* MM *est satisfait dans une extension générique de* $\boldsymbol{V}$. ◁

3.1.6.— Dû à J. Bagaria, le résultat suivant montre que l'axiome MM fournit, au moins partiellement, un phénomène d'absoluité générique pour la

7. Au sens où tout sous-ensemble de $\aleph_1$ qui est stationnaire dans $\boldsymbol{V}$ reste stationnaire dans toute extension générique de $\boldsymbol{V}$ associée à cette algèbre de Boole prise comme ensemble de conditions de forcing.

structure $(H_{\aleph_2}, \in)$, et donc constitue un candidat raisonnable pour l'exploration de cette structure.

Proposition (Π_2-absoluité).— *L'axiome* MM *implique que tout énoncé Π_2 au-dessus de $(H_{\aleph_2}, \in)$ vrai dans une extension générique de $\boldsymbol{V}$ via un forcing préservant la stationnarité est vrai dans $\boldsymbol{V}$.*

▷ *Ce résultat n'est qu'une étape : il ne concerne que les propriétés de $(H_{\aleph_2}, \in)$ qui peuvent s'exprimer par une formule Π_2, c'est-à-dire du type $\forall\exists$, et qu'une famille particulière d'extensions génériques. Pour autant, il montre un lien clair entre axiomes de forcing et invariance générique. Noter le lien entre formules Π_2 et clôture algébrique d'un corps, une condition Π_2 typique : pour toute équation, il existe une solution. Il existe une réciproque : la conclusion de la proposition implique une variante faible de* MM, *dite* axiome de Martin maximum borné MMB, *dont l'énoncé est le même que celui de* MM, *à ceci près que l'on se restreint aux intersections d'ouverts denses qui sont réunions d'au plus $\aleph_1$ ouverts réguliers.* ◁

3.1.7.— La question reste alors d'obtenir une invariance générique plus complète, mais le point remarquable ici est que la description de $H_{\aleph_2}$ fournie par MM est déjà suffisante pour résoudre le problème du continu.

Proposition (MM et HC).— *L'axiome de Martin maximum* MM, *de même que sa version bornée* MMB, *entraînent $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.*

▷ *À partir de* MMB, *S. Todorcevic* [112] *a établi une version effective remarquable de l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, à savoir l'existence d'un bon ordre définissable de longueur ω_2 sur ω^ω utilisant comme seul paramètre une suite d'éléments de ω^ω de longueur ω_1, donc un unique élément de $H_{\aleph_2}$. Autrement dit, on a non seulement $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, mais aussi, en outre, un témoin canonique de cette égalité.* ◁

3.1.8.— C'est à cette approche que se rattachent les travaux de Woodin exposés dans [119]. Le point de départ est la découverte (en 1999) d'un modèle pour la négation de HC qui apparaît canonique en ce qu'il est maximal vis-à-vis des énoncés Π_2 au-dessus de $H_{\aleph_2}$.

▷ *Le résultat principal s'énonce comme l'existence d'une notion de forcing $\mathbb{P}_{\max}$ — dont les éléments sont eux-mêmes des modèles de* ZFC *— tel que toute extension $\mathbb{P}_{\max}$-générique $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})[G]$ de $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})$ satisfait* ¬HC *et que la théorie Π_2 de la structure $(H_{\aleph_2}, \in)$ y est invariante par toute extension générique ultérieure préservant* ¬HC, *c'est-à-dire que* tout *énoncé Π_2 sur $H_{\aleph_2}$ qui peut être forcé en utilisant une notion de forcing préservant* ¬HC *est déjà nécessairement satisfait dans $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})[G]$. Par contraste, D. Aspero, J. Larson, et J. Moore ont montré qu'il ne peut exister de contrepartie de $\mathbb{P}_{\max}$ relativement à* HC, *c'est-à-dire qu'on ne peut espérer un forcing maximisant la théorie Π_2 de $H_{\aleph_2}$ en présence de* HC. *Cela établit une dissymétrie forte entre* ¬HC *et* HC. ◁

3.1.9.— Dès lors qu'une extension $\mathbb{P}_{\max}$-générique de $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})$ apparaît comme canonique, il est naturel de chercher à axiomatiser une telle structure, si cela est possible. Woodin montre que c'est le cas.

Définition (axiome $(*)$).— On note $(*)$ la conjonction de $\mathsf{AD}^{\boldsymbol{L}(\mathbb{R})}$ et de « $\boldsymbol{L}(\mathfrak{P}(\omega_1))$ est extension $\mathbb{P}_{\max}$-générique de $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})$ ».

L'axiome $(*)$ peut être vu comme une sorte de cousin des axiomes MM et MMB. De fait, comme ceux-ci, il implique la négation de HC, sous la forme de l'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

▷ *D. Aspero et R. Schindler* [2] *ont montré qu'une variante de l'axiome de Martin Maximum* MM *implique l'axiome* $(*)$, *établissant ainsi que celui-ci est compatible avec tous les axiomes de grand cardinal* (*ce qui est direct si la* Ω*-conjecture mentionnée ci-dessous est vraie, mais non évident sinon*). ◁

3.1.10.— Dans toute la suite, on note DP^+ l'axiome « il existe une classe propre de cardinaux de Woodin », qui est un renforcement modéré de DP. Pour analyser l'absoluité générique au niveau de $H_{\aleph_2}$, Woodin propose un nouveau cadre conceptuel, la Ω-*logique*, qui est un affaiblissement de la logique du premier ordre dans laquelle les variations dues au forcing sont gommées et où le rôle des preuves est joué par l'existence d'un témoin dans la famille des ensembles de réels universellement Baire.

▷ *Un sous-ensemble* B *de* $(\omega^\omega)^p$ *est dit* universellement Baire *si, pour toute fonction continue* $f : K \to (\omega^\omega)^p$ *avec* K *compact,* $f^{-1}(B)$ *a la propriété de Baire dans* K, *c'est-à-dire qu'il existe un ouvert* U *tel que* $f^{-1}(B) \vartriangle U$ *soit maigre* (IX.1.1.12). *Les boréliens sont universellement Baire et, si* DP^+ *est satisfait, il en est de même de tous les ensembles projectifs. Tout ensemble universellement Baire* B *est* κ*-souslinien pour* κ *convenable* (IX.2.3.2), *et se représente donc comme projection des branches d'un arbre* T_B, *qui joue le rôle d'un code pour* B. *Lorsque l'on passe de* $\boldsymbol{V}$ *à une extension générique* $\boldsymbol{V}[G]$, *l'arbre* T_B *est préservé, mais, dans* $\boldsymbol{V}[G]$, *l'ensemble* $B^{\boldsymbol{V}[G]}$ *des projections de ses branches évalué dans* $\boldsymbol{V}[G]$ *peut inclure* B *strictement.* ◁

3.1.11.— Comme toute logique formelle (sous-section VI.1.1), la Ω-logique, dont les formules sont celles de la théorie des ensembles usuelles, repose sur une notion syntaxique de prouvabilité (existence d'une preuve, c'est-à-dire d'un certificat garantissant une propriété) et une notion sémantique de validité (satisfaction dans des structures de référence).

Définition (Ω-logique).— (i) Un sous-ensemble universellement Baire B de ω^ω est une Ω-*preuve* pour un énoncé Φ de $\mathcal{L}_{\mathrm{ens}}$ si Φ est satisfait dans tout modèle transitif dénombrable M de ZFC qui est B-*clos*, au sens où, pour toute extension générique $\boldsymbol{V}[G]$ de $\boldsymbol{V}$, l'ensemble $B^{\boldsymbol{V}[G]} \cap M[G]$ est dans $M[G]$.

(ii) Un énoncé Φ est dit Ω-*valide* s'il est satisfait dans tout modèle de ZFC de la forme $(V_\lambda, \in)^{\boldsymbol{V}[G]}$.

▷ *Un énoncé est dit* Ω-prouvable *s'il admet au moins une* Ω*-preuve. L'intuition est qu'un énoncé est* Ω*-prouvable s'il ne peut être réfuté par forcing. Plus l'ensemble-témoin* B *est compliqué, plus la condition d'être* B*-clos — c'est-à-dire de contenir tous les avatars possibles de* B *— est contraignante pour* M, *et moins il existe de tels modèles, donc plus l'existence de* B *comme* Ω*-preuve est un critère faible. Si un énoncé* Φ *est prouvable* (*en logique usuelle*) *à partir de* ZFC, *alors* Φ *est satisfait dans tout modèle de* ZFC, *donc en particulier dans tout modèle transitif dénombrable, et donc* tout *ensemble universellement Baire* (*par exemple l'ensemble vide*) *est une* Ω*-preuve pour* Φ. *Mais il existe des énoncés* Ω*-prouvables* *dont les seules Ω-preuves sont plus compliquées que les boréliens et qui ne sont pas prouvables au sens usuel : la Ω-logique étend strictement la logique usuelle. Noter qu'une Ω-preuve ne met en jeu que des objets petits (quoique infinis, à la différence des preuves de la logique usuelle).* ◁

3.1.12.— S'il existe une classe propre de cardinaux de Woodin, la Ω-logique est cohérente, au sens où tout énoncé Ω-prouvable est Ω-valide, c'est-à-dire, essentiellement, valide dans tout extension générique de l'univers. L'implication réciproque, c'est-à-dire la question de savoir si la Ω-logique est complète, est ouverte pour le moment, mais conjecturée par Woodin (2000).

Définition (Ω-conjecture).—(DP^+) Tout énoncé Ω-valide est Ω-prouvable.

▷ *La Ω-conjecture affirme donc (dans le contexte de $\mathsf{ZFC}+\mathsf{DP}^+$, légèrement plus fort que le système de base $\mathsf{ZFC}+\mathsf{DP}$) que tous les énoncés non réfutables par passage à une extension générique ont une « preuve » (ou, disons, un témoin) dans la famille des ensembles universellement Baire. Woodin prédit que la Ω-conjecture sera prouvée, en particulier en raison des liens entre la Ω-logique et les grands cardinaux : on peut montrer qu'un énoncé Π_2 est Ω-prouvable si, et seulement si, il est prouvable (en logique usuelle) à partir de $\mathsf{ZFC}+\exists\kappa\,(\Phi(\kappa))$, où $\exists\kappa\,(\Phi(\kappa))$ est un axiome de grand cardinal tel que, s'il est vrai dans $\boldsymbol{V}$, alors, pour tout ensemble A, l'existence d'un modèle de $\exists\kappa\,(\Phi(\kappa))$ contenant A est Ω-prouvable. Cette propriété est satisfaite pour tous les axiomes de grand cardinaux pour lesquels il peut exister un modèle intérieur canonique, au sens qui sera considéré dans la sous-section 3.2. De là, il résulte que la Ω-conjecture est vraie si tous les grands cardinaux sont accessibles à l'existence de modèles intérieurs canoniques : comme on le verra plus loin, c'est un programme en cours, mais dont l'issue n'est pas inenvisageable. Un point élégant est que la hiérarchie des axiomes de grands cardinaux connus correspond exactement à la complexité des Ω-preuves d'existence dans la hiérarchie de Wadge des ensembles universellement Baire, où B précède B' si à la fois B et le complémentaire de B s'obtiennent comme images réciproques de B' par une fonction de ω^ω dans lui-même qui est lipschitzienne au sens de la métrique usuelle de l'espace de Baire : en ce sens, la Ω-logique explique le caractère linéaire de la hiérarchie des grands cardinaux, qui reflète celui de l'ordre de Wadge sur les ensembles universellement Baire. L'élégance de cette explication plaide certainement en faveur du caractère naturel de toute l'approche basée sur la Ω-logique.* ◁

3.1.13.— En termes de Ω-logique, l'axiome $(*)$ s'exprime comme un principe de maximalité directement reminiscent de ce qui a été vu en 3.1.6 pour MM. Le résultat suivant montre que $(*)$ affirme une sorte de propriété de clôture algébrique pour la structure enrichie $(H_{\aleph_2}, \in, \mathcal{I}_{\mathrm{NS}})$, où $\mathcal{I}_{\mathrm{NS}}$ est la famille des ensembles non stationnaires de ω_1.

Proposition (axiome $(*)$).— *Si DP^+ est vrai, l'axiome $(*)$ équivaut à « pour tout $A \subseteq (\omega^\omega)^{\boldsymbol{L}(\mathbb{R})}$, tout énoncé Π_2 portant sur $(H_{\aleph_2}, \in, \mathcal{I}_{\mathrm{NS}}, A)$ dont la négation n'est pas Ω-prouvable est satisfait ».*

3.1.14.— À partir de là, et pour autant que la Ω-conjecture soit vraie, on déduit que $(*)$ fournit une axiomatisation Ω-*complète* de $(H_{\aleph_2}, \in)$, au sens où, pour chaque énoncé Φ, un et un seul des deux énoncés $(H_{\aleph_2}, \in) \models \Phi$

ou $(H_{\aleph_2}, \in) \models \neg\Phi$ est Ω-prouvable à partir de $(*)$.

▷ *Comme la Ω-prouvabilité est une propriété plus faible que la prouvabilité en logique usuelle, le résultat ci-dessus n'écarte pas l'existence d'énoncés tels que ni Φ, ni $\neg\Phi$ ne soit prouvable, mais, lorsque Φ est Ω-prouvable, on est du moins assuré qu'il ne peut pas être réfuté par passage à une extension générique à partir d'un modèle de* $\mathsf{ZFC}+(*)$. *On n'a donc pas nécessairement une description complète de $H_{\aleph_2}$, mais on retrouve le même type de complétude libérée du forcing qu'avec* ZFC *et $H_{\aleph_0}$, ou avec* $\mathsf{ZFC}+\mathsf{DP}^+$ *et $H_{\aleph_1}$.* ◁

3.1.15.— On a vu que tant l'axiome de Martin maximum MM que sa version bornée MMB ou l'axiome proche $(*)$ contredisent l'hypothèse du continu. On conclut avec un résultat général, annoncé par W.H. Woodin en 2000 et ultérieurement révisé, qui montre qu'il s'agit d'un point commun à ce type d'approche.

Proposition (problème du continu I).— *Si la Ω-conjecture est vraie et si, de plus, une certaine forme forte* AD^+ *de l'axiome de détermination* AD *est Ω-prouvable (« Ω-conjecture forte »), alors, quel que soit l'axiome* A *compatible avec l'existence de grands cardinaux et entraînant l'absoluité générique de $(H_{\aleph_2}, \in)$, le système* $\mathsf{ZFC}+\mathsf{DP}^+ + \mathsf{A}$ *prouve* $\neg\mathsf{HC}$.

Principe de la démonstration. La démonstration repose sur un analogue de la notion d'ensemble récursif (chapitre VIII) adapté à la Ω-logique : un sous-ensemble T de $\mathbb{N}$ est dit Ω-*récursif* s'il existe un sous-ensemble universellement Baire B de ω^ω tel que T soit Δ_1-définissable dans $(\boldsymbol{L}(B, \mathbb{R}), \in, \{\mathbb{R}\})$, de même que T est récursif s'il est Δ_1-définissable dans $H_{\aleph_0}$. Comme $H_{\aleph_0}$ est définissable dans $\boldsymbol{L}(\mathbb{R})$, tout ensemble récursif est Ω-récursif, mais l'existence d'ensembles universellement Baire plus compliqués que les boréliens entraîne celle d'ensembles Ω-récursifs plus compliqués que les ensembles récursifs. On montre alors que, sous l'hypothèse DP^+, l'existence d'un ensemble Ω-récursif non définissable dans $(H_{\aleph_2}, \in)$ entraîne celle d'une surjection définissable de $\mathbb{R}$ sur $\aleph_2$. Par le théorème de Tarski (VIII.4.3.1), l'ensemble des (numéros des) énoncés satisfaits dans $H_{\aleph_2}$ ne peut être définissable dans $H_{\aleph_2}$. Si donc cet ensemble est Ω-récursif, ce qui est le cas s'il existe A donnant une description Ω-complète de $(H_{\aleph_2}, \in)$, on a nécessairement $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_2$. (Sans l'hypothèse additionnelle sur AD^+, la conclusion serait seulement une définissabilité dans H_{δ_0}, où δ_0 est le plus petit cardinal de Woodin, et on ne pourrait conclure.) □

3.1.16.— Il n'y a pour le moment pas de raison, ni encore moins de consensus, pour considérer MM, ou $(*)$, comme suffisamment étayés par une accumulation de théorèmes probants pour être incorporés dans la liste des axiomes de base, à la façon dont cela a été le cas pour DP dans la sous-section XV.3.3. Les résultats ci-dessus ne sauraient donc être considérés comme une solution du problème du continu, mais on constate une convergence vers $\neg\mathsf{HC}$: collectivement, l'approche des modèles maximaux va dans le sens d'une solution négative au problème du continu.

3.2. Les modèles canoniques

▶ Résumé.— On peut espérer compléter le programme des modèles canoniques avec un modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ si on parvient au niveau des cardinaux supercompacts. ◀

3.2.1.— Une limitation essentielle des approches mentionnées dans la sous-section 3.1, où il s'agit d'identifier des sortes de modèles maximaux, est qu'elles ne peuvent concerner que le niveau de $H_{\aleph_2}$, sans éclairer les niveaux supérieurs : on sait d'ores et déjà qu'aucun axiome ne peut impliquer l'absoluité générique pour $(H_\kappa, \in)$ avec $\kappa \geqslant \aleph_3$. Ces approches n'apportent donc aucune indication sur l'hypothèse du continu généralisée HCG. À l'opposé, une autre piste est celle des modèles canoniques, qui pourraient aussi être dits minimaux, où il s'agit d'identifier un plus petit modèle possédant les propriétés requises et susceptible d'être choisi comme modèle de référence.

3.2.2.— Le point de départ est le modèle $\boldsymbol{L}$ des ensembles constructibles étudié au chapitre XI. Sa structure fine a été analysée de façon très précise dans les années 1970 [19], et il est, en un sens, le modèle de ZFC le mieux compris. Pour autant, il ne peut pas être pris comme modèle de référence canonique, car il est incompatible avec l'existence des grands cardinaux : on a vu dans le chapitre XIII qu'il ne peut exister de cardinal mesurable dans $\boldsymbol{L}$ et donc, *a fortiori*, l'axiome de détermination projective est en défaut dans $\boldsymbol{L}$. On a du reste multiplié les exemples de contradictions entre les visions du monde selon $\boldsymbol{L}$ et selon DP. Puisque, désormais, DP fait partie des axiomes de base du système, un modèle de référence *doit* satisfaire DP.

3.2.3.— Depuis les années 1970, un vaste programme a été développé pour construire des modèles semblables au modèle $\boldsymbol{L}$, possédant notamment une structure fine du même type, et néanmoins compatibles avec l'existence de grands cardinaux de plus en plus grands. La première étape a été celle de $\boldsymbol{L}[U]$, qui fournit un modèle canonique pour un cardinal mesurable.

▷ *Partant d'un ultrafiltre κ-complet U sur un cardinal mesurable κ de $\boldsymbol{V}$, la construction de $\boldsymbol{L}[U]$ est celle de* XI.4.1.1*, donc semblable à celle de $\boldsymbol{L}$ mais avec U comme paramètre légal dans les définitions. L'ensemble U lui-même n'appartient pas nécessairement à $\boldsymbol{L}[U]$, mais $U \cap \boldsymbol{L}[U]$ est, dans $\boldsymbol{L}[U]$, un ultrafiltre κ-complet sur κ, donc κ est un cardinal mesurable dans $\boldsymbol{L}[U]$. Le modèle $\boldsymbol{L}[U]$ possède une structure fine analogue à celle de $\boldsymbol{L}$, et est un paradigme du type de modèle canonique recherché. Une propriété remarquable est que le modèle $\boldsymbol{L}[U]$ ne dépend pas de U : si κ est un cardinal mesurable (dans $\boldsymbol{V}$), il peut exister sur κ des ultrafiltres κ-complets très différents les uns et des autres, mais, néanmoins, si U et U' sont deux tels ultrafiltres, alors $\boldsymbol{L}[U]$ et $\boldsymbol{L}[U']$ coïncident, de même que les intersections $U \cap \boldsymbol{L}[U]$ et $U' \cap \boldsymbol{L}[U]$.* ◁

3.2.4.— En revanche, le modèle $\boldsymbol{L}[U]$ ne contient qu'un seul cardinal mesurable, et il est très éloigné de satisfaire DP. Du reste, une large part des pathologies du modèle $\boldsymbol{L}$ se retrouvent dans $\boldsymbol{L}[U]$: par exemple, dans $\boldsymbol{L}[U]$, il existe un bon ordre $\boldsymbol{\Delta}^1_3$ de ω^ω, et donc il est faux que tous les ensembles projectifs soient Lebesgue-mesurables dans $\boldsymbol{L}[U]$. Il faut donc aller plus loin dans la hiérarchie des grands cardinaux.

▷ *Grimpant dans la hiérarchie des grands cardinaux, on construit ensuite des modèles du type $\boldsymbol{L}[\vec{U}]$, où $\vec{U}$ est une suite d'ultrafiltres sur des cardinaux distincts, fournissant des modèles canoniques compatibles avec l'existence de plusieurs cardinaux mesurables, puis celle de cardinaux mesurables limites de cardinaux mesurables, etc. Ensuite, pour aller plus haut, on considère des modèles du type $\boldsymbol{L}[\vec{E}]$ où $\vec{E}$ est une famille d'extendeurs : on a vu en* XIV.1.2.7 *qu'un extendeur est une famille cohérente d'ultrafiltres permettant d'approximer plus fidèlement un plongement élémentaire qu'un ultrafiltre unique, et, de là, d'obtenir en particulier des propriétés de clôture plus fortes pour le modèle d'arrivée. De la sorte, on atteint avec les modèles dits* de Mitchell–Steel *le niveau des cardinaux forts, puis des cardinaux de Woodin et donc, de là, de la détermination projective* DP *et de sa variante forte* DP^+ (*existence d'une classe propre de cardinaux de Woodin*). ◁

3.2.5.— Le problème reste d'aller au-delà dans la hiérarchie des grands cardinaux, un modèle canonique ne pouvant être considéré comme candidat à un rôle universel que s'il est compatible avec *tous* les grands cardinaux. Dans la suite des modèles canoniques précédente, il se trouve toujours que le modèle pour un niveau est incompatible avec l'existence de grands cardinaux de niveau supérieur : par exemple, dans le modèle $\boldsymbol{L}[U]$, il n'existe qu'un cardinal mesurable, et un nouveau modèle est nécessaire pour obtenir, disons, une infinité de cardinaux mesurables. De ce fait, comme la hiérarchie des grands cardinaux apparaît ouverte vers le haut, on voit mal comment l'approche pourrait aboutir en un temps fini à un modèle compatible avec *tous* les grands cardinaux. Or, un phénomène remarquable est apparu au niveau des cardinaux supercompacts (XIV.1.3.1).

Proposition (supercompact).— (Woodin) *Si un modèle $\boldsymbol{L}[X]$ contient une famille d'extendeurs témoignant de ce qu'un cardinal κ est supercompact dans $\boldsymbol{L}[X]$, alors, pour tout extendeur E de $\boldsymbol{V}$ satisfaisant* $\mathrm{cr}(\boldsymbol{j}_E) \geqslant \kappa$ *et tel que $\boldsymbol{L}[X]$ est clos par E, on a $E \cap \boldsymbol{L}[X] \in \boldsymbol{L}[X]$.*

▷ *Ce que dit ce résultat est que, si $\boldsymbol{L}[X]$ contient un cardinal supercompact κ, alors il contient automatiquement (la trace de) tous les extendeurs au-dessus de δ.* Tous *les grands cardinaux au-dessus de κ présents dans $\boldsymbol{V}$ gardent donc dans $\boldsymbol{L}[X]$ leurs propriétés de grand cardinal, quelles que soient celles-ci, pourvu qu'elles puissent être attestées par des extendeurs convenables.* ◁

3.2.6.— Par conséquent, et à la différence de la situation pour les niveaux inférieurs où le modèle canonique pour un niveau ne contient jamais de cardinaux des niveaux ultérieurs, si $\boldsymbol{L}[X]$ est un (encore hypothétique) modèle canonique pour un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux ultérieurs. Par conséquent, il suffit d'atteindre le niveau d'un cardinal supercompact pour achever le programme des modèles canoniques pour les grands cardinaux : le modèle canonique pour un cardinal supercompact est un modèle « *ultime* » dans cette approche qui commence avec $\boldsymbol{L}$, et il est donc naturel de le noter $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$.

3.2.7.— À l'heure actuelle, la construction du modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ est un problème ouvert, mais plusieurs propriétés en sont déjà connues.

▷ *Woodin a montré que le modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ ne peut pas être un modèle de Mitchell–Steel, et il prédit qu'il appartiendrait à une nouvelle famille dite de « modèles intérieurs stratégiques ». Un tel modèle serait du type $\mathbf{HOD}^{\boldsymbol{L}(B,\mathbb{R})}$ avec B universellement Baire. Comme les modèles $\mathbf{HOD}^{\boldsymbol{M}}$ ne sont pas invariants par forcing en général, il n'en existe pas de description uniforme comme pour les modèles $\boldsymbol{L}[X]$; en revanche, dès que l'existence d'une infinité de cardinaux de Woodin est supposée, $\mathsf{AD}^{\boldsymbol{L}(\mathbb{R})}$ est satisfait, la borne supérieure Θ des ordinaux sur lesquels ω^ω peut être surjecté est un cardinal de Woodin dans $\mathbf{HOD}^{\boldsymbol{L}(\mathbb{R})}$, et $\mathbf{HOD}^{\boldsymbol{L}(\mathbb{R})} \cap V_\Theta$ est un modèle de Mitchell–Steel.* ◁

3.2.8.— À côté de la recherche d'une construction de $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$, se pose la question de son axiomatisation, c'est-à-dire la recherche d'un énoncé ensembliste A tel qu'un modèle $\boldsymbol{M}$ de ZFC satisfait A si, et seulement si, il coïncide avec $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ calculé dans $\boldsymbol{M}$, à la façon dont l'axiome $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}$, c'est-à-dire l'énoncé $\forall x\, \exists\alpha\, (x \in L_\alpha)$, caractérise les modèles qui coïncident avec leur version de la classe $\boldsymbol{L}$.

Conjecture (axiomatisation).— (Woodin) *Soit $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ la conjonction de DP^+ et de « chaque énoncé Σ_1 satisfait dans $\boldsymbol{V}$ est satisfait dans une structure $(\mathbf{HOD} \cap V_\Theta)^{\boldsymbol{L}(B,\mathbb{R})}$ avec B sous-ensemble universellement Baire de ω^ω et Θ borne supérieure des ordinaux sur lesquels ω^ω peut être surjecté ». Alors, $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ axiomatise $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$.*

3.2.9.— Se fondant sur les résultats partiels obtenus, Woodin propose [120] une nouvelle conjecture, bien sûr très audacieuse.

Conjecture (axiome $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$).— *L'axiome $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ est vrai.*

▷ *Il est difficile de se prononcer sur la plausibilité d'une telle conjecture, mais, en revanche, l'exemple de la détermination projective DP doit rendre facile de comprendre ce qu'elle prédit, à savoir qu'un jour, sur la base d'une longue accumulation de résultats prouvés et de la qualité de la description de l'univers des ensembles que celle-ci fournit, l'axiome $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ aura acquis le même niveau d'évidence intuitive que DP aujourd'hui, et qu'un consensus pourra s'établir sur l'opportunité de l'adjoindre aux axiomes de ZFC et de prendre le système complété $\mathsf{ZFC}{+}\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ (qui, par définition, étend l'actuel système $\mathsf{ZFC}{+}\mathsf{DP}$) comme nouvelle base de référence standard pour l'étude de l'infini.* ◁

3.2.10.— Revenant au problème du continu, et par contraste avec 3.1.7, il est facile de déduire de l'étude des modèles $\mathbf{HOD}^{\boldsymbol{L}(B,\mathbb{R})}$ que HC est entraînée par l'axiome $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$, et de même à tous les étages.

Proposition (problème du continu II).— *Le système $\mathsf{ZFC}{+}\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ prouve HCG.*

3.2.11.— Par conséquent, si la conjecture 3.2.9 venait à être établie (au sens indiqué ci-dessus), le problème du continu devrait à son tour être considéré comme *résolu*, cette fois avec la validité de l'hypothèse du continu.

▷ *D'une façon générale, la vision du monde des ensembles et de l'infini induite par l'axiome* $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ *et, plus généralement, par l'approche des modèles minimaux, est très différente de celle que suggère la recherche de modèles maximaux de la sous-section* 3.1. *Dans cette approche, la variabilité due au forcing existe toujours mais, plutôt que de chercher à neutraliser celui-ci, on privilégie une sorte de noyau central au-dessus duquel le forcing peut se déployer, mais qui contient assez d'ensembles pour rendre compte de tous les phénomènes possibles, en particulier tous les grands cardinaux. Une telle conception est à rapprocher avec la description de* $(H_{\aleph_0}, \in)$, *c'est-à-dire de l'arithmétique, fournie par* ZFC, *où, à l'exception des limitations liées aux théorèmes de Gödel, aucun énoncé n'est indépendant des axiomes. Dans l'exposé* [123], *W.H. Woodin développe l'exemple éclairant d'une théorie des ensembles finis sans axiome des parties ni axiome d'infini, où l'univers* V_ω *est filtré par les entiers successifs, et où chaque entier* n *est* (*analogue à*) *un grand cardinal par rapport à ses prédécesseurs. La vision résultant de* $\mathsf{ZFC}{+}\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ *serait similaire à celle que le système de Peano* PA_1 *donne de l'arithmétique, avec cette fois une filtration par les grands cardinaux, mais pas davantage de phénomènes d'indépendance. Ces perspectives sont fascinantes.* ◁

3.3. Une conclusion

▶ Résumé.— La théorie des ensembles continue. Rien n'indique que le problème du continu ne sera pas résolu dans le futur, sur le modèle de ce qui a été fait avec l'adoption de l'axiome de détermination projective et des grands cardinaux. ◀

3.3.1.— À la date présente (2017), le problème du continu n'est pas résolu : il n'existe pas de consensus sur un système axiomatique unique qui déciderait, soit dans un sens, soit dans l'autre, l'hypothèse du continu. Le point commun de toutes les approches développées à ce jour est de chercher de nouveaux axiomes dont les modèles fournissent une description suffisamment complète de l'univers des ensembles, ou au moins d'un fragment de celui-ci, compatible avec les parties déjà tenues pour acquises (par exemple l'existence de grands cardinaux) et avec les intuitions généralement partagées (notion évidemment vague). Mais on a vu ci-dessus qu'il existe des approches divergentes, certaines fondées sur des principes de maximalité et menant en général à $\neg\mathsf{HC}$, d'autres au contraire reposant sur la recherche de modèles canoniques et menant à HC.

▷ *Un chercheur comme S. Todorcevic reste résolument du côté des axiomes de forcing et des principes de maximalité, fondant cette option sur la vision générale des ensembles, en particulier de* $H_{\aleph_2}$, *que ceux-ci impliquent* (*voir par exemple* [116]). *À l'opposé, W.H. Woodin ne fait pas mystère sur le fait qu'après avoir privilégié ce type d'approche jusqu'aux années 2000, il a ensuite changé de point de vue pour explorer désormais le point de vue des modèles canoniques. Sa position prend alors la forme d'une alternative, ouverte à ce jour :*

- soit la Ω-conjecture est fausse, auquel cas le modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ *n'existe pas (en tout cas pas sur les bases considérées actuellement), et alors l'approche par les axiomes de forcing est la plus séduisante — et elle implique que* HC *est fausse ;*

- soit la Ω-conjecture est vraie, auquel cas on peut espérer compléter la construction du modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$*, et alors les arguments en faveur de l'axiome* $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ *apparaîssent plus convaincants — et ils impliquent que* HC *est vraie.* ◁

3.3.2.— Le point important ici est de voir qu'il n'y a pas de contradiction entre ces options diverses : ce n'est pas sur la base d'une intuition *a priori* qu'il s'agit de choisir une approche, mais *a posteriori* en fonction des conséquences que ces approches impliquent. C'est exactement ce qu'exprimait N. Luzin en 1935 :

> « *Alors, la nécessité s'imposera à nous de choisir entre les diverses hypothèses du continu, toutes exemptes de contradiction, et ce choix devra être dicté par l'observation seule des faits.* »

▷ *Entre les axiomes* $\boldsymbol{V}{=}\boldsymbol{L}$ *et «* $0^\sharp$ existe *», qui se contredisent, le choix en faveur du second ne s'est pas fait de façon aléatoire ou sur la foi d'une évidence première, mais au vu de leurs conséquences, typiquement existence ou non d'ensembles pathologiques tels qu'un ensemble* $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ *non Lebesgue-mesurable. C'est la même situation, et le même type de consensus, qui sont recherchés, mais pas encore atteints, pour les étages plus élevés de l'univers des ensembles. Il s'agit donc d'accumuler un corpus de résultats à partir d'un ou plusieurs axiomes nouveaux donnant à celui-ci ou à ceux-ci la même qualité que les résultats des années 1970–80 ont donnée à* DP*, légitimant de ce fait leur intégration dans la liste des propriétés de base des ensembles. Si un tel consensus émerge en faveur d'un certain axiome* A*, et s'il se trouve que, à partir de* ZF+DP+A*, on peut prouver (resp., réfuter) l'hypothèse du continu, alors on pourra — devra ? — considérer que celle-ci est vraie (resp., fausse), et que le problème du continu est résolu.* ◁

3.3.3.— On espère que, parvenu à ce point, le lecteur sera d'accord pour retenir de ce tour d'horizon les quatre conclusions suivantes.

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, ni plus, ni moins.

• Son histoire ne s'est pas arrêtée dans les années 1960 avec le théorème de Cohen.

• La saga de la détermination projective montre comment, sur la base de théorèmes prouvés, on peut découvrir de nouveaux axiomes vrais.

• Le problème du continu reste ouvert, mais il existe plusieurs approches pouvant mener à sa solution dans l'avenir, alors que rien ne vient étayer l'idée qu'une telle solution ne puisse exister.

—==000==—

Repères chronologiques

▸ L'axiome de Martin maximum a été introduit en 1984 par M. Foreman (né en 1957), M. Magidor (né en 1946), et S. Shelah (né en 1945).

▸ La Ω-logique a été introduite par W.H. Woodin vers 1999.

▸ Le modèle $\boldsymbol{L}[U]$ a été introduit en 1971 par K. Kunen (né en 1948), et étudié notamment par A.J. Dodd et R. Jensen (né en 1936) dans la décennie suivante. Les modèles de Mitchell–Steel ont été introduits par W. Mitchell (né en 1947) et J. Steel (né en 1948) dans les années 1980–90.

▸ Le résultat de 3.2.5 sur les cardinaux supercompacts a été établi par W.H. Woodin en 2006.

Résumé du chapitre XVI

▸ Les théorèmes de Gödel sapent l'espoir que la théorie des ensembles puisse prouver la cohérence de l'édifice mathématique.

▸ La présentation de la logique et de la théorie des ensembles de N. Bourbaki reflète une vision pré-Gödelienne et plusieurs malentendus sur l'objet et la nature de la théorie, malheureusement ensuite diffusés à travers les aberrations des mathématiques dites modernes.

▸ Sans diminuer la pertinence de la théorie des ensembles comme outil d'exploration de l'infini, l'existence de systèmes fondationnels alternatifs interdit une attitude dogmatique et monopoliste : que les objets mathématiques puissent se représenter comme ensembles ne prouve pas qu'ils soient des ensembles.

▸ Outre l'indépendance de HC et AC vis-à-vis de ZF, des progrès remarquables ont été obtenus avec DP et l'analyse de $H_{\aleph_1}$.

▸ La théorie a, pour le moment, échoué à résoudre nombre des problèmes sur l'infini qui ont motivé son développement.

▸ Les applications directes de la théorie des ensembles mettent souvent en jeu des objets éloignés du cœur des mathématiques.

▸ Les approches visant à une absoluité générique de $H_{\aleph_2}$, en particulier les versions fortes de l'axiome de Martin, penchent vers la négation de HC.

▸ On peut espérer compléter le programme des modèles canoniques avec un modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ si on parvient au niveau des cardinaux supercompacts. S'il existe, un tel modèle $\boldsymbol{L}^{\text{ultime}}$ vérifie nécessairement HCG.

▸ La théorie des ensembles continue. Rien n'indique que le problème du continu ne sera pas résolu dans le futur, sur le modèle de ce qui a été fait avec l'adoption de l'axiome de détermination projective et des grands cardinaux.

—==000==—