

Avant-propos

Présentation et motivation

Qu'elles soient faites de cheveux, de fils de laine ou de câbles électriques, tout le monde sait ce que sont les tresses. En revanche, il n'est pas évident est que l'on puisse en faire une *théorie*, c'est-à-dire élaborer un corpus cohérent et mathématiquement intéressant de résultats portant sur ces objets. Notre but ici est de persuader le lecteur d'une réponse résolument positive à cette question : les tresses sont des objets fascinants aux propriétés mathématiques riches et variées.

Pour cela, on va se concentrer sur quelques résultats que l'on établira avec soin. Un point commun est qu'en dépit d'énoncés très simples, des démonstrations relativement sophistiquées sont requises. Au cœur de l'approche, une opération naturelle de multiplication des tresses mènera à des structures de groupe, les *groupes de tresses*. Combinant des aspects algébriques et topologiques, ces groupes ont des multiples propriétés et sont tout à la fois simples et compliqués.

Guide de lecture

Introductif, ce petit texte ne prétend à aucune exhaustivité et n'aborde que quelques-unes des nombreuses propriétés connues de groupes de tresses. Un accent spécial est mis sur les aspects algorithmiques et ce qui peut être appelé le « calcul des tresses », en particulier le *problème d'isotopie*, qui est la question de reconnaître si deux diagrammes de tresse *a priori* distincts peuvent

être continûment déformés l'un sur l'autre. L'intérêt de cette question est qu'elle peut être abordée et résolue par de multiples voies, dont aucune n'est évidente, mais qui toutes mènent à des solutions concrètes que l'on pourra tester à la main ou avec un ordinateur.

Le texte comprend huit chapitres, certains (chapitres I, V, VII) de nature plus topologique, les autres plus algébriques. Si les chapitres I et II forment un socle commun pour toute la suite, les chapitres III à VII, qui présentent des approches diverses, sont assez indépendants les uns des autres.

De façon un peu plus détaillée, le chapitre I est consacré à la modélisation de la notion de tresse. On introduit pour tout n un *espace des tresses à n brins* dont les éléments sont des classes d'équivalence de tresses géométriques par rapport à une (en fait plusieurs) notion naturelle de déformation. Ensuite, on projette les tresses géométriques sur des diagrammes plans que l'on code par des mots (« mots de tresse »), et on débouche sur le *problème d'isotopie des tresses*, à savoir reconnaître si deux diagrammes, ou les mots qui les codent, représentent la même tresse. On constate l'échec des tentatives naïves pour résoudre le problème d'isotopie, appelant au développement d'approches plus élaborées.

L'étude des espaces des tresses B_n , et en particulier l'obtention de solutions simples au problème d'isotopie, passe par l'existence sur B_n d'une structure de groupe, abordée dans le chapitre II. Une telle structure algébrique, spécifique aux tresses, explique en particulier pourquoi le problème d'isotopie associé, quoique non trivial, est néanmoins plus facile que celui d'autres objets topologiques analogues comme les nœuds. Comme point de départ, on établit une caractérisation de la structure de groupe en terme de présentation par générateurs et relations. Deux appendices complètent le chapitre, l'un consacré aux présentations de monoïde, l'autre aux présentations de groupe. Chacun offre un traitement assez complet et accessible sans connaissance préalable.

Ceci ne suffit pas à répondre en pratique aux questions sur B_n , à commencer par le problème de mot, c'est-à-dire le problème d'isotopie des tresses, et il faut donc continuer à travailler. On va décrire dans le chapitre III une première solution, fondée sur l'approche développée dans les années 1960 par F.A. Garside dans sa thèse préparée sous la direction de G. Higman, et reposant sur

l'analyse d'une structure auxiliaire, le monoïde B_n^+ , qui se révélera *a posteriori* être un sous-monoïde du groupe B_n .

Suite directe du précédent, le chapitre IV continue à exploiter les propriétés des monoïdes B_n^+ pour étudier les groupes B_n . Le nouvel ingrédient ici est le fait que la relation de divisibilité à gauche du monoïde B_n^+ a une structure de treillis. Cela permet de construire, pour les tresses positives d'abord, puis pour les tresses quelconques, des formes normales uniques, c'est-à-dire de définir, pour chaque tresse à n brins, une décomposition distinguée en fragments élémentaires, essentiellement des permutations de $\{1, \dots, n\}$, menant à une nouvelle solution efficace et simple en pratique au problème d'isotopie.

On revient dans le chapitre V à une approche topologique. Développée par E. Artin dès les années 1920, celle-ci est basée sur l'action des tresses sur le groupe fondamental d'un disque percé et mène à une représentation fidèle du groupe B_n dans le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang n . On en déduit à la fois une nouvelle solution du problème d'isotopie, et une démonstration de l'équivalence de l'isotopie et de l'isotopie au sens non restreint pour les tresses géométriques, laissée en suspens depuis le chapitre I. Cependant, certains résultats ne seront ici établis que *modulo* une propriété supplémentaire des tresses (« propriété de comparaison ») laissée pendante.

Le premier but du chapitre VI est de fournir une démonstration de cette propriété de comparaison, ce que l'on fait à l'aide d'une méthode dite de réduction des poignées. L'intérêt de la méthode va au-delà dans la mesure où elle fournit une nouvelle solution au problème d'isotopie qui, en pratique, est heuristiquement plus efficace que la mise en forme normale du chapitre IV.

On a utilisé les aspects topologiques des tresses pour définir une action du groupe B_n sur le disque pointé \mathbb{D}_n dans le chapitre V. Dans le chapitre VII, on fait agir les tresses sur des familles de courbes (presque) tracées dans \mathbb{D}_n et, en comptant des intersections, obtenir une action sur des suites d'entiers appelées coordonnées de Dynnikov. Cette approche mène à des formules étonnantes mettant en jeu les opérations max et + et à une nouvelle solution, extrêmement efficace, pour le problème d'isotopie des tresses.

Enfin, le but du chapitre VIII est d'ouvrir quelques pistes ultérieures. Il va dans deux directions : d'abord, vers les groupes B_n eux-mêmes, avec quelques mots sur les monoïdes duaux, sur les représentations linéaires, et sur les applications potentielles en cryptographie, puis vers les nombreuses extensions et généralisations des groupes de tresses, avec quelques exemples sur les groupes de tresses de surface, puis les groupes d'Artin-Tits, pour finir sur l'offre d'une récompense alléchante (mais tout à fait sérieuse)...

De nombreux compléments et quelques démonstrations qui n'ont pas trouvé leur place sont proposés en exercices tout au long du texte. Des solutions rédigées sont disponibles à l'adresse

<https://dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/Books/Tresses/Exos.pdf>

Prérequis

L'option prise ici est de ne supposer que très peu de connaissances préliminaires, jamais au-delà du programme des premières années de licence. La plupart des résultats sont établis « à partir de zéro ». Dans quelques cas où des notions plus avancées sont nécessaires (monoïdes et groupes présentés, théorème de Ore, groupe fondamental d'un disque percé), une introduction détaillée est fournie en appendice en fin du chapitre.

Remerciements

Issu de notes de cours enseignés devant des publics variés, le texte a bénéficié de nombreuses discussions avec les étudiants des universités de Caen, de Paris, et de Canton, et avec les collègues du Groupement de Recherche « Tresses » du CNRS (GDR 2105). Qu'ils soient ici collectivement remerciés. Une mention spéciale est due à mes amis Dale ROLFSEN et Seiichi KAMADA. Enfin, dans des circonstances perturbées par un problème de santé, je remercie pour leur aide Pierre DEHORNOY, John GUASCHI, et, tout spécialement, Jean FROMENTIN.

Arnières-sur-Iton, juin 2019

Table des matières

I. Tresses géométriques	
1. L'espace des tresses géométriques	2
1.1. Des tresses matérielles aux tresses géométriques . .	2
1.2. Homotopie et isotopie : définition	4
1.3. Homotopie et isotopie : équivalence	8
1.4. L'espace des tresses	11
2. Diagrammes et mots de tresse	16
2.1. Projections planes des tresses géométriques	16
2.2. Isotopie de diagrammes de tresse	20
2.3. Codage par des mots de tresse	22
3. Le problème d'isotopie des tresses	25
3.1. Un problème pour le moment ouvert	25
3.2. Premières tentatives	27
II. Les groupes de tresses	
1. Le groupe B_n	32
1.1. Le produit des tresses	32
1.2. La structure de groupe de B_n	35
1.3. La présentation d'Artin du groupe B_n	39
1.4. Quelques conséquences	44
2. Appendice A : monoïdes présentés	45
2.1. Les monoïdes de mots	45
2.2. La propriété universelle des monoïdes S^*	47
2.3. Présentation de monoïde	48
2.4. Le problème de mot d'un monoïde présenté	51

3. Appendice B : groupes présentés	53
3.1. Les groupes libres	54
3.2. Présentation de groupe	57
3.3. Le problème de mot d'un groupe présenté	59
3.4. Groupes libres et mots réduits	60
III. Les monoïdes de tresses	
1. Le monoïde B_n^+	63
1.1. Définition et premières propriétés	63
1.2. Le problème du plongement	68
1.3. Multiples communs dans B_n^+	70
2. Simplification dans B_n^+	74
2.1. Grilles de retournement	74
2.2. Couples de mots stables	76
2.3. Application à la simplification	82
3. Applications à l'étude des tresses	83
3.1. Le groupe B_n comme groupe de fractions de B_n^+	83
3.2. Une solution au problème de mot pour B_n^+	86
3.3. Une solution au problème de mot pour B_n	91
4. Appendice C : le théorème de Ore	94
4.1. L'énoncé	94
4.2. Démonstration de 4.1.1	94
4.3. Démonstration de 4.1.2	97
IV. La forme normale gloutonne	
1. La structure de treillis de B_∞^+	100
1.1. La relation de divisibilité à gauche	100
1.2. Les tresses de permutation	102
1.3. Les tresses simples	104
2. Forme normale, tresses positives	109
2.1. La tête d'une tresse positive	109
2.2. La forme normale	112
2.3. Calcul de la forme normale	114
3. Formes normales, tresses quelconques	120
3.1. La forme Delta-normale	120
3.2. La forme normale symétrique	125
4. Applications	134
4.1. La torsion dans B_n	134
4.2. Le problème de conjugaison	135
4.3. Cyclage et décyclage	139

V. La représentation d'Artin	
1. Action des tresses sur les lacets	144
1.1. Groupes de tresses et groupe modulaire	144
1.2. La représentation d'Artin	146
2. L'injectivité de la représentation d'Artin	149
2.1. Tresses σ -positives	149
2.2. Une démonstration de la propriété d'acyclicité	151
2.3. Injectivité de la représentation d'Artin	153
2.4. Équivalence des isotopies forte et faible	154
3. Appendice D : groupe fondamental d'un disque percé	155
3.1. Le groupe fondamental	155
3.2. Le groupe fondamental d'un disque à un trou	157
3.3. Le groupe fondamental d'un disque à n trous	158
VI. La réduction des poignées	
1. Les poignées d'une tresse	161
1.1. La notion de poignée	161
1.2. La réduction des poignées	163
2. Convergence de la réduction	165
2.1. Mots tracés dans un sous-ensemble	165
2.2. Le préfixe critique	169
2.3. Fin de la démonstration	172
3. Applications	174
3.1. Une démonstration de la propriété de comparaison	174
3.2. L'ordre des tresses	176
VII. Les formules de Dynnikov	
1. Action des tresses sur les laminations	179
1.1. Laminations	180
1.2. Triangulations	181
1.3. Les coordonnées de Dynnikov	182
2. Utilisation des coordonnées	186
2.1. Construction directe	186
2.2. Injectivité des coordonnées	187
2.3. Implémentation	189

VIII. Quelques pistes	
1. Davantage sur B_n	191
1.1. Le monoïde dual	191
1.2. Représentations linéaires	194
1.3. Applications à la cryptographie	196
2. Des cousins très divers	197
2.1. Les groupes de tresses de surface	198
2.2. Les groupes d'Artin–Tits	200
Notations	205
Index	207
Bibliographie	209