L'art de tresser

Patrick DEHORNOY

Les tresses modélisent l'opération de permuter des objets en enregistrant l'histoire de cette permutation. Une nouvelle méthode permet de simplifier les tresses et de reconnaître rapidement si deux tresses sont équivalentes.

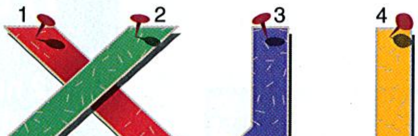
Une tresse est une figure formée de plusieurs brins qui se croisent tout en gardant la même orientation générale : pour une tresse à n brins, on peut imaginer n fils accrochés «en haut» à des clous alignés et pendant «vers le bas» en se croisant, sans jamais remonter. À l'arrivée, en bas, on retrouve les n fils, mais dans un ordre différent ; les positions ont subi une permutation *(voir la figure 1)*.

En mathématiques et en physique, les permutations sont des opérations courantes. Les tresses sont des outils précieux, car elles permettent d'analyser ces permutations en tenant compte de la succession des opérations effectuées. La classification des tresses est alors une question fondamentale, et nous allons décrire une méthode efficace pour se faire.

L'isotopie des tresses

Pour l'étude des tresses, comme pour l'étude des nœuds *(voir l'encadré 1)*, on ne s'intéresse pas aux tresses individuellement, mais on recherche des équivalences entre tresses. On considère que deux tresses sont équivalentes lorsqu'on obtient l'une à partir de l'autre en déplaçant des brins, sans les autoriser à se traverser ni décrocher leurs extrémités : on dit aussi que ces tresses sont isotopes. La figure 3 montre deux tresses isotopes à la tresse de la figure 1. Pour obtenir la première, on a simplement remonté le croisement inférieur (entre les brins bleu et vert) au-dessus du croisement le précédant (entre les brins rouge et jaune). La transformation vers la seconde est plus compliquée, mais elle respecte l'interdiction que les brins se traversent : on a poussé vers la droite le brin vert, qui contournait initialement le croisement des brins rouge et bleu par la gauche et par-dessus ; il contourne maintenant ce même croisement par la droite.

Notons que l'isotopie ne change pas la permutation associée à une tresse. Ainsi les permutations des brins correspondant aux deux tresses de la figure 3 sont les mêmes que celle de la tresse de la figure 1 : la permutation est un *invariant d'isotopie* de la tresse. Toutefois, cet invariant n'est pas *complet,* car il arrive que deux tresses aient la même permutation et ne soient pas isotopes. La figure 4 donne le plus simple des contre-exemples : deux demi-tours à la suite ne modifient pas les positions des brins, mais produisent une tresse non isotope à la tresse *triviale* (sans croisement), car, par transformation continue et en laissant les bouts attachés, on ne pourra jamais éliminer ses croisements.



1. Une tresse à quatre brins (et quatre croisements). Elle a pour effet de permuter les brins : 1234 devient 3241.

On voit ainsi qu'une tresse est plus qu'une permutation : elle contient aussi l'histoire de celle-ci. Les deux tresses de la figure 4 représentent deux manières distinctes de réaliser la permutation «identité» : dans l'une, on n'a rien fait du tout, dans l'autre, on a permuté deux fois de suite, de sorte que le résultat final est quand même l'identité.

Le groupe des tresses

Les tresses ont certes des qualités esthétiques *(voir la figure 2)*, mais les mathématiciens s'intéressent surtout aux structures sous-jacentes et aux propriétés profondes. Un point fondamental distingue les tresses des nœuds et explique pourquoi des problèmes similaires sont généralement plus faciles à résoudre pour les tresses que pour les nœuds : on peut construire un *groupe* dans l'ensemble des tresses, c'est-à-dire définir une notion raisonnable de *produit* de deux tresses, de sorte, notamment, que toute tresse ait un inverse. Cette construction remonte à Emil Artin, un mathématicien allemand émigré aux États-Unis en 1937, qui fut l'un des plus grands algébristes de ce siècle et l'un des premiers à étudier les tresses.

La «multiplication» de deux tresses repose sur un principe naturel : étant donné deux tresses à un même nombre n de brins, leur produit est la tresse obtenue en accrochant la seconde sous la première. Cette nouvelle tresse possède, elle aussi, n brins *(voir la figure 5)*.

La multiplication ainsi définie est une opération *associative* : le produit de trois tresses ou plus est indépendant de l'ordre d'exécution des produits deux à deux. On peut commencer par multiplier les deux premières tresses ou les deux dernières : si α, β, γ sont trois tresses au même nombre n de brins, $(\alpha\beta)\gamma$ est égal à $\alpha(\beta\gamma)$. En revanche, on doit respecter l'ordre des tresses (l'opération n'est pas commutative) : $\alpha\beta$ diffère généralement de $\beta\alpha$. En outre, la tresse triviale est un élément neutre pour le produit des tresses : accrocher une tresse triviale sous une tresse revient à en allonger les brins, ce qui ne change rien à la tresse.

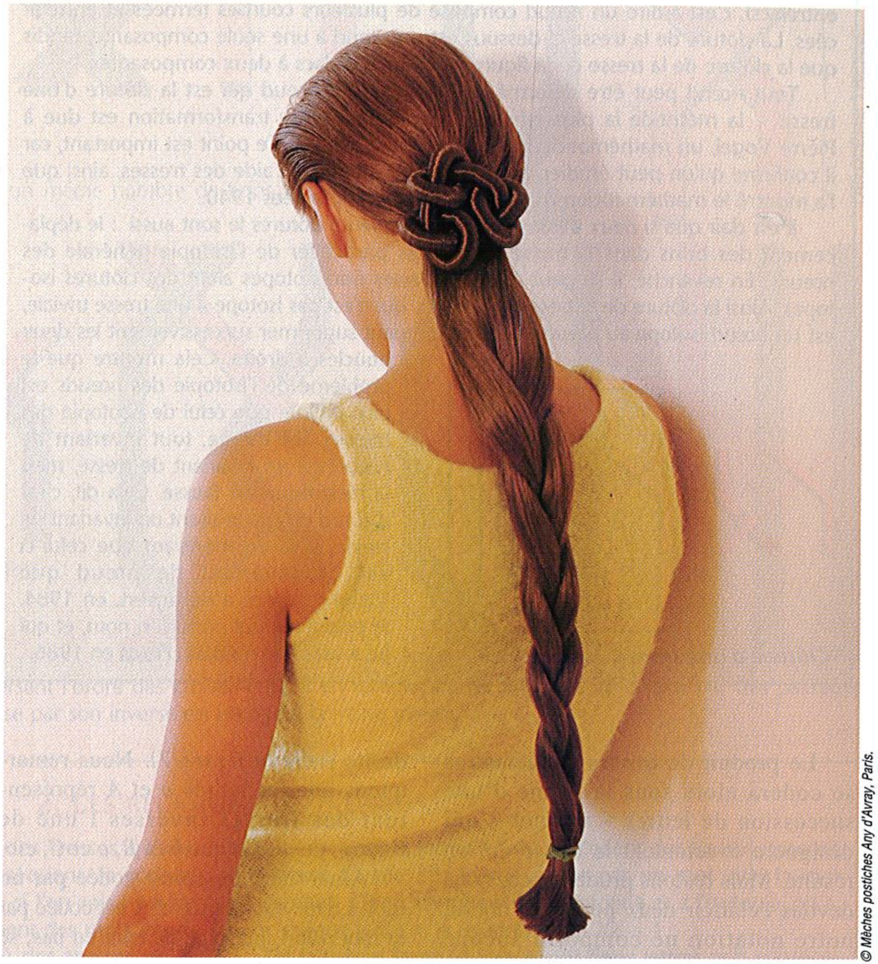
Un point plus intéressant est que toute tresse possède un inverse : pour toute tresse α, il existe une tresse α^{-1} telle que le produit de α et α^{-1} soit la tresse triviale. Il suffit de définir α^{-1} comme l'image de α dans un miroir horizontal, ce qui revient à effectuer les mêmes croisements, mais dans l'ordre inverse, et en changeant les orientations «dessus-dessous». Dans la multiplication de α par α^{-1}, les croisements se dénouent deux à deux en partant du milieu et aboutissent à une tresse triviale *(voir la figure 6)*.

Ici, notre langage est imprécis, car le produit de la tresse α par la tresse α^{-1} n'est *pas* la tresse triviale : c'est seulement une tresse isotope à celle-ci, puisqu'il faut d'abord dénouer les paires de croisements opposés pour obtenir la tresse triviale. On exprime cette nuance en disant qu'on obtient un inverse *à isotopie près*. Ainsi ce ne sont pas exactement les tresses qui constituent un groupe au sens de l'algèbre, mais les tresses à isotopie près, c'est-à-dire les objets qu'on obtient quand on identifie deux à deux les tresses isotopes.

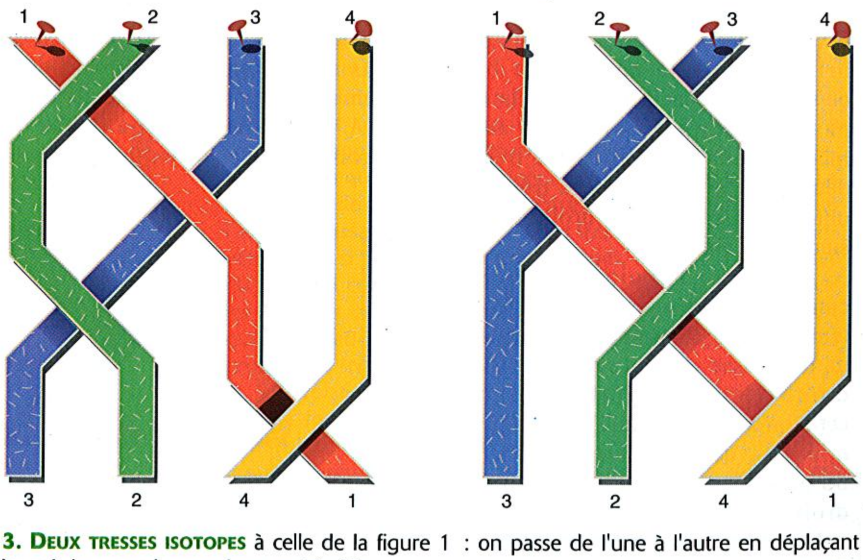
Pour chaque entier n, on construit, à partir des tresses à n brins, un groupe qu'on note généralement B_n (B pour *braid*, qui signifie *tresse* en anglais). Le groupe B_1 des tresses à un brin n'est guère intéressant... Le groupe B_2 équivaut au groupe des nombres entiers usuels, car une tresse à deux brins est complètement caractérisée par le nombre de demi-tours effectués (avec un signe qui indique l'orientation des croisements) : ainsi les groupes de tresses, dont on a déjà dit qu'ils généralisent les groupes de permutations, généralisent aussi les groupes de nombres.

Coder les tresses

L'existence du produit des tresses permet de passer du langage des dessins à celui des mots. En effet, une conséquence de notre définition de la multiplication de tresses est qu'une tresse quelconque est décomposable en un produit de tresses élémentaires à un seul croisement : une telle décomposition consiste à découper la tresse en tranches horizontales qui ne contiennent qu'un seul croisement. Or il est facile de coder les tresses à un seul croisement : comme les deux brins qui se croisent sont voisins (sinon il faudrait aussi croiser les brins intermédiaires, et il y aurait plus d'un croisement), il suffit, pour reconnaître un croisement élémentaire, d'indiquer la position des deux brins concernés. Nous noterons a la tresse élémentaire où les brins 1 et 2 se croisent, b celle où les brins 2 et 3 se croisent, et ainsi de suite *(voir la figure 7)*.



2. La tresse, objet esthétique du coiffeur, est aussi un objet mathématique.



3. Deux tresses isotopes à celle de la figure 1 : on passe de l'une à l'autre en déplaçant leurs brins, sans bouger leurs extrémités.

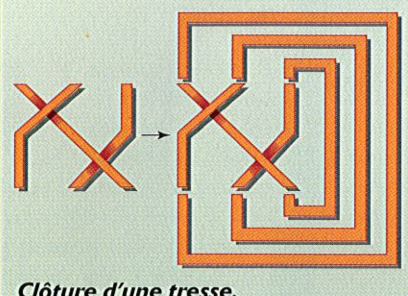
1. Tresses et nœuds

Les tresses et les nœuds sont de la même famille. Pour fabriquer un nœud à partir d'une tresse, il suffit de refermer la tresse en joignant les brins du bas à ceux du haut.

Suivant les cas, plus exactement suivant la permutation associée, la clôture d'une tresse peut être un nœud «à plusieurs composantes» (ce qu'on appelle un entrelacs), c'est-à-dire un nœud composé de plusieurs courbes fermées et entrelacées. La clôture de la tresse ci-dessous est un nœud à une seule composante, tandis que la clôture de la tresse de la figure 1 est un entrelacs à deux composantes.

Tout nœud peut être déformé pour donner un nœud qui est la clôture d'une tresse – la méthode la plus efficace pour réaliser cette transformation est due à Pierre Vogel, un mathématicien de l'Université Paris VII. Ce point est important, car il confirme qu'on peut étudier entièrement les nœuds à l'aide des tresses, ainsi que l'a montré le mathématicien russe Markov, dans les années 1940.

Il est clair que si deux tresses sont isotopes, leurs clôtures le sont aussi : le déplacement des brins dans la tresse est un cas particulier de l'isotopie générale des nœuds. En revanche, il se peut que des tresses non isotopes aient des clôtures isotopes. Ainsi la clôture de la tresse ci-dessous, qui n'est pas isotope à une tresse triviale, est un nœud isotope au nœud trivial, car on peut supprimer successivement les deux boucles à droite. Cela montre que le problème de l'isotopie des nœuds est plus difficile que celui de l'isotopie des tresses. De même, tout invariant de nœud est un invariant de tresse, mais la réciproque est fausse. Cela dit, c'est d'abord en construisant un invariant de tresse, puis en montrant que celui-ci est un invariant de nœud que Vaughan Jones a découvert, en 1984, le polynôme qui porte son nom, et qui lui a valu une médaille Fields en 1986.

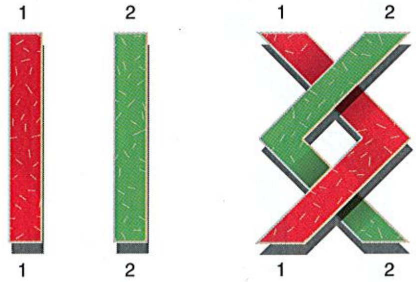


Clôture d'une tresse.

Le produit de tresses élémentaires se codera alors sous la forme d'une succession de lettres – un mot – qui désignera exactement la tresse qui en résulte. Mais restons prudents, car nous devons éclaircir deux points. D'abord, notre notation ne comporte aucune information sur le nombre de brins total des tresses que nous considérons : peut-être devrions-nous désigner les tresses élémentaires par les expressions «*a* pour deux brins», «*a* pour trois brins», selon le nombre de brins qu'elles contiennent. En fait, cela n'est pas nécessaire, car il n'y a aucun inconvénient à identifier une tresse à deux brins avec la tresse à trois brins obtenue en rajoutant à droite un troisième brin non tressé.

Le second point à éclaircir concerne le sens des croisements : en terme d'isotopie, il importe de savoir si un brin passe *sous* ou *sur* son voisin de droite. Notre notation doit contenir cette information : nous déciderons que *a*, *b*, *c*,... désignent les cas où le brin de gauche passe sous son voisin de droite, et nous introduirons de nouvelles tresses élémentaires *A*, *B*, *C*,... où le brin passe sur son voisin de droite *(voir la figure 7)*. Nous remarquons que les lettres *a* et *A* représentent des tresses inverses l'une de l'autre, de même que *b* et *B*, *c* et *C*, etc.

Ainsi toute tresse est codée par un mot. La tresse de la figure 1 est codée par le mot *aBcA*, puisque, de haut en bas, se succèdent les croisements notés *a*, puis *B*, puis *c* et enfin *A*. De même, les tresses de la figure 2 sont codées par les mots *aBAc* et *BAbc*. Dans notre code, le produit des tresses correspond à la juxtaposition des mots : par exemple, le produit de la figure 5 correspond à l'égalité *aB* × *cA* = *aBcA*. On pourra s'amuser à vérifier que la tresse «usuelle» qu'on forme dans les cheveux est codée par *AbAbAb*... – ou *aBaBaB*... – suivant le sens de départ.



4. Deux tresses non isotopes, bien qu'elles correspondent à la même permutation. La première est nommée tresse triviale, car aucun brin n'est tressé.

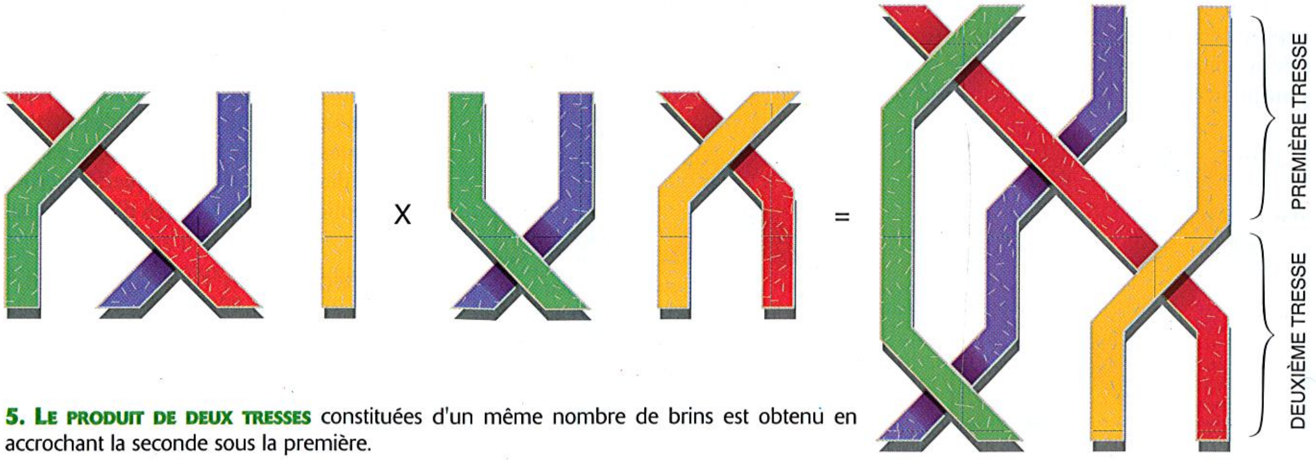
En soi, l'utilisation d'un code ne résout aucune question, mais permet de traduire les questions dans un langage mieux adapté – en l'occurrence celui de l'algèbre *(voir l'encadré 2)*. Un tel codage peut aussi faciliter les calculs : un ordinateur traite plus facilement des mots que des dessins.

La classification des tresses

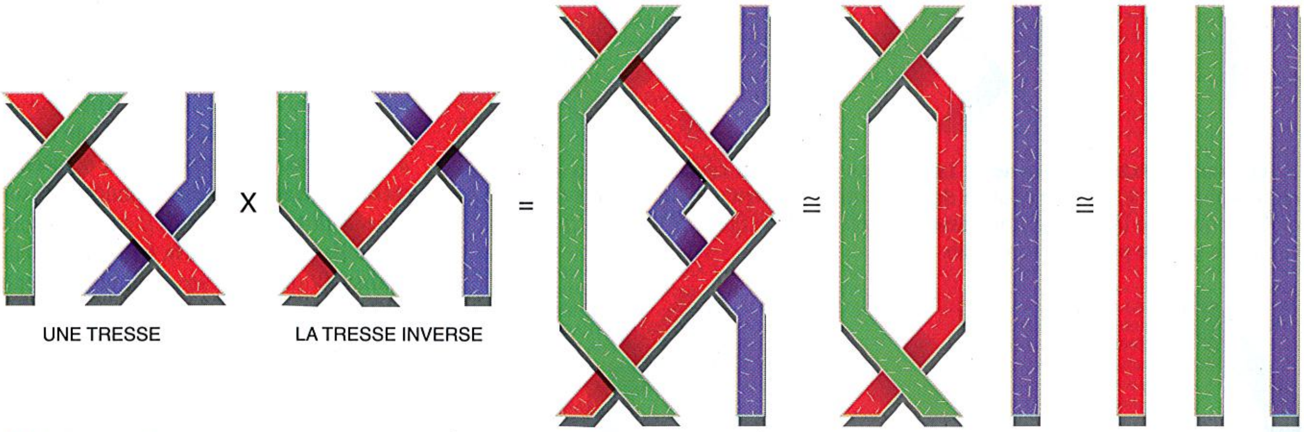
Classer les tresses consiste à donner une recette pour reconnaître si deux tresses données quelconques sont ou non isotopes, c'est-à-dire si l'on peut passer de l'une à l'autre en déplaçant leurs brins. La question analogue pour les nœuds reste ouverte et préoccupe encore nombre de mathématiciens. Pour les tresses, on sait résoudre le problème depuis les travaux d'Artin, dans les années 1920. Pour autant, le sujet n'est pas clos, car la solution d'Artin, quoique irréprochable en théorie, est très peu efficace en pratique : lorsque deux tresses sont un peu compliquées, même un ordinateur puissant ne peut reconnaître, par la méthode d'Artin, si elles sont isotopes.

Depuis plusieurs décennies, la question de la classification des tresses a suscité de nombreux travaux, et plusieurs méthodes ont été proposées, de plus en plus efficaces. Citons notamment les travaux de F.A. Garside, à Oxford, ceux de Pierre Deligne, médaille Fields en 1970 et actuellement à Princeton, et ceux de William Thurston, également médaille Fields et actuellement à Berkeley. Ce dernier a montré que les groupes de tresses ont une structure automatique, ce qui signifie qu'il existe un automate – une sorte d'ordinateur théorique rudimentaire – qui calcule le produit des tresses ; il en a déduit une méthode de classification bien plus rapide que celle d'Artin.

La méthode de Thurston est très efficace lorsque l'on considère des tresses à un nombre de brins pas trop grand, par exemple six ou huit. Malheureusement, lorsque le nombre de brins augmente, elle devient vite impraticable. Pour une tresse à n brins, l'automate sous-jacent possède un nombre d'états égal à $n!$, c'est-à-dire égal au produit $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n$. Pour $n = 20$, c'est-à-dire lorsqu'on compare des tresses à 20 brins, le nombre de calculs à effectuer devient gigantesque.



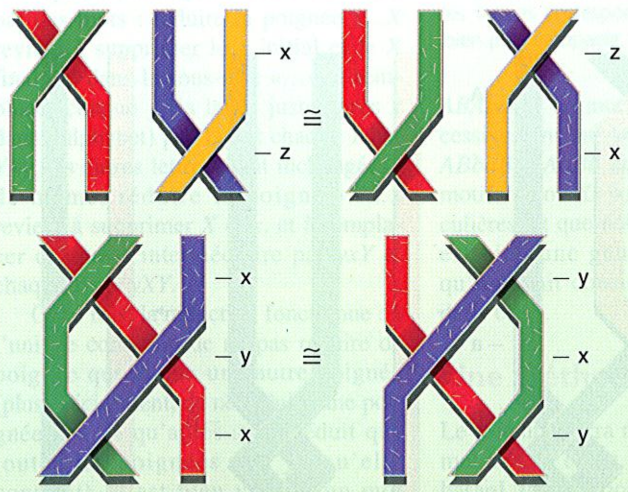
5. Le produit de deux tresses constituées d'un même nombre de brins est obtenu en accrochant la seconde sous la première.



6. L'inverse d'une tresse est obtenu en inversant l'ordre des croisements et en remplaçant les passages au-dessus par des passages au-dessous et *vice versa*. Le produit d'une tresse par son inverse est isotope à la tresse triviale.

2. Les relations de tresse

On s'intéresse davantage à l'isotopie des tresses qu'aux tresses à proprement parler. Par conséquent, le codage des tresses par des mots n'a d'intérêt que si l'on sait traduire l'isotopie dans le langage des mots. Comment des mots expriment-ils l'isotopie (au sens géométrique) des tresses qu'ils codent? Par des relations d'isotopie, c'est-à-dire par des paires de mots distincts codant des tresses isotopes : par exemple,



Deux relations de tresse. On a $xz \cong zx$ (en haut) et $xyx \cong yxy$ (en bas).

tous les mots de la forme xX ou Xx codent des tresses isotopes à la tresse triviale, elle-même codée par un mot vide (aucun croisement). Donc, en notant 1 le mot vide et $\cong$ l'isotopie, on a, pour chaque lettre x, la relation $xX \cong Xx \cong 1$.

De la même façon, si x et z sont deux lettres non consécutives dans l'alphabet, on a une nouvelle relation qui s'écrit $xz \cong zx$ *(voir la figure)*. Le cas des lettres consécutives est plus délicat, mais on pourra vérifier que, si x et y sont deux lettres consécutives, alors on a la relation $xyx \cong yxy$. Cette relation étant la plus importante, on la nomme parfois, par défaut, *la* relation de tresse.

À ce point, on est certain de la propriété suivante : si deux tresses sont codées par des mots tels qu'on passe de l'un à l'autre en appliquant, éventuellement plusieurs fois de suite, les relations qu'on a écrites, alors ces tresses seront isotopes. La réciproque de ce résultat, démontrée par Emil Artin, constitue l'acte de naissance de la théorie des tresses : elle affirme qu'inversement, si deux tresses sont isotopes, alors on peut passer du mot qui code la première à celui qui code la seconde par les relations de tresse – dans le langage de l'algèbre, on dit que les relations de tresse constituent une présentation des groupes de tresses.

Les relations de tresse, notamment la relation $xyx \cong yxy$, sont le fondement de nombreuses études théoriques. Elles apparaissent dans divers langages, distincts de celui des groupes, comme celui des algèbres («algèbres de Hecke») ou celui des opérateurs («équation de Yang-Baxter»), et, de là, dans toute la théorie des groupes quantiques.

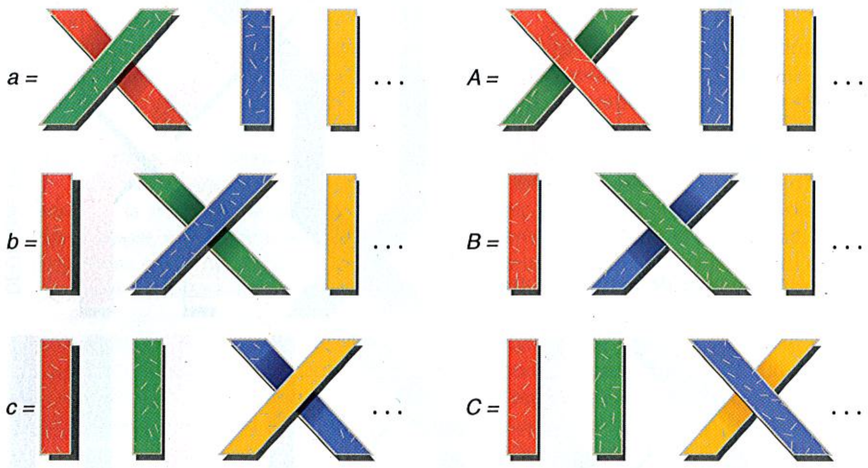
Peut-on faire mieux? Oui, par une méthode amusante, que nous allons décrire maintenant et avec laquelle chacun pourra jouer, soit à la main, soit à l'aide d'un ordinateur par un programme simple. Nous avons élaboré récemment cette méthode à l'Université de Caen, à partir de travaux issus d'une branche des mathématiques qui n'a rien à voir avec la topologie et les tresses, à savoir la théorie des ensembles *(voir l'encadré 3)* : elle constitue un exemple de plus de l'unité profonde des mathématiques – et de l'impossibilité essentielle de savoir *a priori* quelles seront les applications ultérieures d'un résultat.

La réduction des poignées

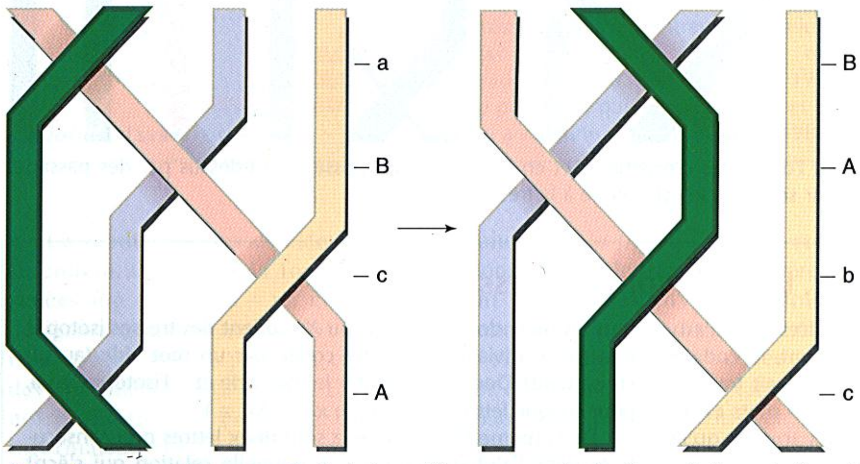
Nous souhaitons comparer les tresses, c'est-à-dire reconnaître si deux tresses données sont ou non isotopes. Une idée simple serait de comparer les permutations associées, mais nous avons vu que cela ne suffit pas puisque des tresses non isotopes peuvent être associées à la même permutation. Il faut chercher autre chose.

Remarquons que, comme toute tresse a un inverse, notre problème se ramène à reconnaître si une tresse donnée est isotope à la tresse triviale : pour que la tresse β soit isotope à la tresse α, il faut et il suffit que la tresse $\alpha^{-1}\beta$ soit isotope à la tresse $\alpha^{-1}\alpha$, donc à la tresse triviale.

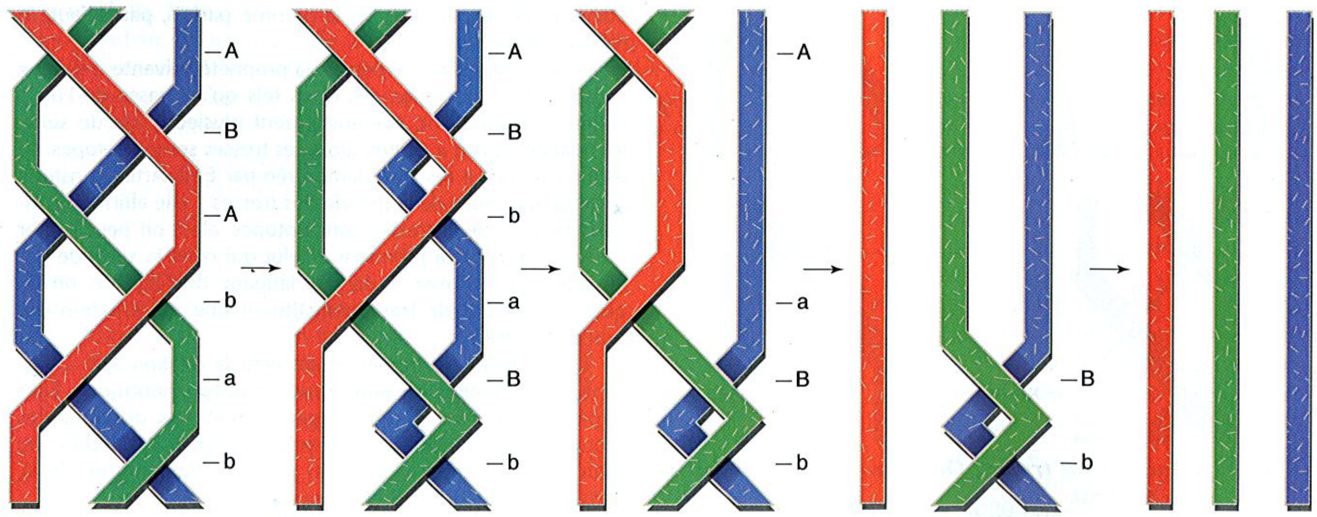
Considérons une tresse à deux brins : elle est codée par un mot où n'apparaissent que les lettres *a* et *A*, par exemple *aaaAaAA*. Pour reconnaître si un tel mot représente une tresse triviale, on peut le *réduire* progressivement en supprimant les sous-mots de la forme *aA* ou *Aa* qui représentent des morceaux de tresse triviaux. Partant du mot ci-dessus, on obtiendra successivement les mots *aaaAA*, *aaA* et finalement *a*. Le dernier mot est réduit : on ne peut pas le réduire davantage. On se souvient que, pour deux brins, seul compte le nombre de demi-tours, et donc un mot écrit avec des *a* et des *A* représente la tresse



7. Les tresses élémentaires sont les tresses à un seul croisement. On les note par ordre alphabétique, selon la position des brins qui se croisent : les minuscules désignent les croisements où le brin de gauche passe sous son voisin de droite et les majuscules, ceux où le brin de gauche passe sur son voisin.



8. La réduction d'une poignée. Le brin vert forme une poignée *(à gauche)* : on le force à contourner les croisements voisins par la droite. Ainsi la poignée *aBcA* se réduit à *BAbc*.



9. Réduction de la tresse *ABAbab* à la tresse triviale.

triviale quand il comporte autant de a que de A. On pressent alors le résultat : comme les réductions suppriment autant de a que de A, notre mot de départ représente une tresse triviale exactement dans le cas où ce mot se réduit à un mot vide, c'est-à-dire que toutes les lettres disparaissent dans la réduction.

Considérons maintenant des tresses à trois brins ou plus. La méthode précédente ne fonctionne plus : les mots *aba* et *bab* représentent des tresses isotopes *(voir l'encadré 2)*, et donc le mot «quotient» *ABAbab* représente une tresse triviale. Or ce mot est réduit, puisqu'il ne contient aucune paire du type *aA*, *Aa*, *bB* ou *Bb*. On doit définir une nouvelle réduction, plus forte, de manière à ce qu'un mot représente une tresse triviale exactement quand il se réduit, au sens de la nouvelle réduction, à un mot vide.

Le principe de cette nouvelle réduction consiste à chercher les poignées de la tresse qu'on étudie : on appelle ainsi les motifs du type $x...X$ ou $X...x$ où, entre la lettre x et son inverse X, ne figurent que des lettres «à droite de x», c'est-à-dire après x dans l'ordre alphabétique. On comprend l'origine de ce nom en regardant la figure 8, qui correspond au cas où x est a : le brin vert forme une poignée à gauche en passant par-dessus les autres brins (s'il passait par-dessous, la poignée commencerait par une lettre majuscule). On *réduit* la poignée en forçant le brin qui passait à gauche à contourner par la droite, de la façon la plus serrée possible, les croisements immédiatement à droite (qui, du coup, sont poussés d'un cran vers la gauche).

La réduction est une opération géométrique, mais elle se traduit aisément par des mots : réduire la poignée $x...X$ revient à supprimer le x initial et le X final, et, dans le sous-mot «...», à remplacer chaque y (la lettre juste après x dans l'alphabet) par Yxy et chaque Y par YXy, les autres lettres étant inchangées ; de même, réduire la poignée $X...x$ revient à supprimer X et x, et à remplacer chaque y intermédiaire par yxY et chaque Y par yXY.

Cette fois, la réduction fonctionne : à l'unique condition de ne pas réduire de poignée qui inclue une autre poignée (plus précisément, de ne réduire une poignée «en x» qu'après avoir réduit que toutes les poignées «en y» qu'elle contient), il est bien vrai qu'un mot représente une tresse triviale exactement quand il se réduit à un mot vide. La figure 9 montre une réduction du mot

BABABABABABABABABABABABABABABABABAB **Abbbbbbbbbbbbcba**
BABABABABABABABABABABABABABABAB **ABa** aaaaaaaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABA **ABa** aaaaaaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAb **ABa** aaaaaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbb **ABa** aaaaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbb **ABa** aaaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbb **ABa** aaaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbb **ABa** aaaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbb **ABa** aaaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbb **ABa** aaBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbbb **ABa** aBcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbb **ABa** BcbaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbbbAB **Bcb** aB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbbbA **Bcb** CaB
BABABABABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbbb **AcbCCa** B
BABABABABABABABABABABABABABAB **Abbbbbbbbbbcba** BCCB
BABABABABABABABABABABABAB **ABa** aaaaaaaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABA **ABa** aaaaaaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAb **ABa** aaaaaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbb **ABa** aaaaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbb **ABa** aaaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbb **ABa** aaaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbb **ABa** aaBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbb **ABa** aBcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbbb **ABa** BcbaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbAB **Bcb** aBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbbbbA **Bcb** CaBBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbbbb **AcbCCa** BBCCB
BABABABABABABABABABABABAbbbbbbbb **AcbCCa** BBCCB
BABABABABABABABABABABAB **Abbbbbbbbcba** BCCBBCCB
BABABABABABABABABAB **ABa** aaaaaaBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABA **ABa** aaaaaBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAb **ABa** aaaaBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbb **ABa** aaaBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbb **ABa** aaBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbbb **ABa** aBcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbbbb **ABa** BcbaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbbbbbAB **Bcb** aBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbbbbbA **Bcb** CaBBCCBBCCB
BABABABABABABABABAbbbbbb **AcbCCa** BBCCBBCCB
BABABABABABABABAB **Abbbbbbcba** BCCBBCCBBCCB
BABABABABABAB **ABa** aaaaBcbaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABA **ABa** aaaBcbaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAb **ABa** aaBcbaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAbb **ABa** aBcbaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAbbb **ABa** BcbaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAbbbbAB **Bcb** aBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAbbbbA **Bcb** CaBBCCBBCCBBCCB
BABABABABABAbbbb **AcbCCa** BBCCBBCCBBCCB
BABABABABAB **Abbbbcba** BCCBBCCBBCCBBCCB
BABABAB **ABa** aaBcbaBBCCBBCCBBCCBBCCB
BABABA **ABa** aBcbaBBCCBBCCBBCCBBCCB
BABABAb **ABa** BcbaBBCCBBCCBBCCBBCCB
BABABAbbAB **Bcb** aBBCCBBCCBBCCBBCCB
BABABAbbA **Bcb** CaBBCCBBCCBBCCBBCCB
BABABAbb **AcbCCa** BBCCBBCCBBCCBBCCB
BABAB **Abbcba** BCCBBCCBBCCBBCCBBCCB
B **ABa** BcbaBBCCBBCCBBCCBBCCBBCCB
AB **Bcb** aBBCCBBCCBBCCBBCCBBCCB
A **Bcb** CaBBCCBBCCBBCCBBCCBBCCB
AcbCCa BBCCBBCCBBCCBBCCBBCCB
cbaBCCBBCCBBCCBBCCBBCCBBCCB

ABBAABBAABBAAAAA **Abbbbbbbbcba**
ABBAABBAABBAAAAA **Aba** aaaaaaaBcbaB
ABBAABBAABBAAAA **Aba** BaaaaaaaBcbaB
ABBAABBAABBAAA **Aba** BBaaaaaaaBcbaB
ABBAABBAABBAA **Aba** BBBaaaaaaaBcbaB
ABBAABBAABBA **Aba** BBBBaaaaaaaBcbaB
ABBAABBAABB **Aba** BBBBBaaaaaaaBcbaB
ABBAABBA **ABa** BBBBBBaaaaaaaBcbaB
ABBAABBAb **ABBBBBBBa** aaaaaaBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAA **ABa** aaaaaBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAb **ABa** aaaaBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAbb **ABa** aaaBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAbbb **ABa** aaBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAbbbb **ABa** aBcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAbbbbb **ABa** BcbaB
ABBAABBAbbAAAAAAbbbbbbAB **Bcb** aB
ABBAABBAbbAAAAAAbbbbbbA **Bcb** CaB
ABBAABBAbbAAAAAAbbbbbb **AcbCCa**
ABBAABBAbbAAAAA **Abbbbbbcba** BCCB
ABBAABBAbbAAAA **Aba** aaaaaBcbaBBCCB
ABBAABBAbbAAA **Aba** BaaaaaBcbaBBCCB
ABBAABBAbbAA **Aba** BBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAABBAbbA **Aba** BBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAABBAbb **Aba** BBBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAABB **Abbba** BBBBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBA **ABa** aaBBBBBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAb **ABa** aBBBBBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAbb **ABa** BBBBBBaaaaaBcbaBBCCB
ABBAbbb **ABBBBBBBa** aaaaBcbaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAA **ABa** aaaBcbaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAb **ABa** aaBcbaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAbb **ABa** aBcbaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAbbb **ABa** BcbaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAbbbbAB **Bcb** aBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAbbbbA **Bcb** CaBBCCB
ABBAbbbbAAAAAAbbbb **AcbCCa** BBCCB
ABBAbbbbAAAAA **Abbbbcba** BCCBBCCB
ABBAbbbbAAAA **Aba** aaaBcbaBBCCBBCCB
ABBAbbbbAAA **Aba** BaaaBcbaBBCCBBCCB
ABBAbbbbAA **Aba** BBaaaBcbaBBCCBBCCB
ABBAbbbbA **Aba** BBBaaaBcbaBBCCBBCCB
ABBAbbbb **Aba** BBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
ABB **Abbbbba** BBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
ABa aaaaBBBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
b **ABa** aaaBBBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
bb **ABa** aaBBBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
bbb **ABa** aBBBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
bbbb **ABa** BBBBBBaaaBcbaBBCCBBCCB
bbbbb **ABBBBBBBa** aaBcbaBBCCBBCCB
bbbbbbAAAAAA **ABa** aBcbaBBCCBBCCB
bbbbbbAAAAAAb **ABa** BcbaBBCCBBCCB
bbbbbbAAAAAAbbAB **Bcb** aBBCCBBCCB
bbbbbbAAAAAAbbA **Bcb** CaBBCCBBCCB
bbbbbbAAAAAAbb **AcbCCa** BBCCBBCCB
bbbbbbAAAAA **Abbcba** BCCBBCCBBCCB
bbbbbbAAAA **Aba** aBcbaBBCCBBCCBBCCB
bbbbbbAAA **Aba** BaBcbaBBCCBBCCBBCCB
bbbbbbAA **Aba** BBaBcbaBBCCBBCCBBCCB
bbbbbbA **Aba** BBBaBcbaBBCCBBCCBBCCB
bbbbbb **Aba** BBBBaBcbaBBCCBBCCBBCCB
bbbbbbbaBBBBBa **Bcb** aBBCCBBCCBBCCB
bbbbbbbaBBBBBacbCaBBCCBBCCBBCCB

10. Deux réductions laborieuses... À chaque étape, on réduit la première poignée (la plus à gauche dans le mot), formée des lettres rouges. On pourrait bien sûr dessiner les tresses correspondantes, mais l'utilisation du codage par des mots fournit une notation bien plus compacte, qui révèle des phénomènes tels que la périodicité.

ABAbab à un mot vide, en passant successivement par les mots intermédiaires *ABbaBb*, *AaBb* et *Bb*. Notons que les motifs *xX* ou *Xx* sont des poignées particulières, et que notre nouvelle réduction est bien une généralisation de celle qu'on avait considérée dans le cas de deux brins.

Une méthode efficace

Le lecteur pourra réduire n'importe quel mot de son choix. Sur des mots pris au hasard, la réduction a toutes les chances de se terminer très vite, ce qui signifie que la méthode est efficace : en moyenne, la réduction de tresses à plusieurs milliers de croisements et un nombre quelconque de brins (même 20, 50 ou plus) ne prend pas plus d'une seconde sur un micro-ordinateur. Avec un peu de chance, on trouvera quand même des mots pour lesquels la réduction est un peu longue – en chercher est un sport amusant : je recommande les mots de la forme *BABABA...bbbbb...cba*, qui sont parmi les pires que je connaisse pour les tresses à quatre brins. On constatera que supprimer une poignée peut en faire apparaître de nouvelles et qu'il se produit des choses mystérieuses : la longueur des mots intermédiaires peut croître et décroître alternativement ;

3. Coloriages de tresses

Le coloriage des brins des tresses clarifie leur représentation. Quand les couleurs ne sont pas modifiées lors des croisements (c'est le cas de toutes les figures de cet article), on visualise la permutation associée à la tresse en comparant l'ordre des couleurs en haut et en bas (en entrée et en sortie). Peut-on accéder à d'autres informations sur la tresse en adoptant un autre type de coloriage?

Supposons que les couleurs changent lors des croisements. Imposons la règle de coloriage simple, mais déjà intéressante, suivante : lorsqu'on parcourt un croisement de haut en bas, le brin qui passe dessous garde sa couleur, alors que le brin du dessus adopte une nouvelle couleur qui ne dépend que des anciennes couleurs des deux brins qui se sont croisés. Autrement dit, on fixe une sorte de multiplication, notée $*$, sur l'ensemble des couleurs, et la nouvelle couleur du brin du dessus est le produit des couleurs des deux brins qui se sont croisés *(voir la figure)*.

Règle de coloriage.

Comme nous ne nous intéressons aux tresses qu'à isotopie près, nous voudrions que les couleurs ne changent pas lorsqu'on remplace une tresse par une tresse isotope – plus exactement, lorsque nous choisissons des couleurs initiales (en haut de la tresse), nous voudrions que les couleurs finales qui en résultent (en bas de la tresse) ne dépendent que des couleurs initiales et de la tresse à isotopie près. Pour garantir cela, il suffit que les couleurs ne changent pas quand on applique les relations de tresses de l'encadré 2. En examinant ce qui se passe pour les relations du type $xyx \approx yxy$, on verra que cette exigence équivaut à la condition suivante sur le produit de couleurs :

$$p * (q * r) = (p * q) * (p * r),$$

nommée *autodistributivité à gauche*.

Chaque fois que l'on trouve «dans la nature» un produit qui vérifie l'autodistributivité à gauche, on peut l'utiliser pour colorier les tresses, et espérer en découvrir de nouvelles propriétés. Ce lien entre les tresses et les produits autodistributifs a été observé il y a plus de dix ans par plusieurs chercheurs, dont Egbert Briekorn, à Bonn, et David Joyce, aux États-Unis. On sait maintenant que les tresses et les produits autodistributifs sont deux aspects différents d'une même réalité géométrique.

Il n'est pas aisé de construire des exemples de produits autodistributifs. Pendant longtemps, l'un des seuls exemples connus était le produit correspondant à la formule

$$p * q = (1 - t)\, p + t\, q,$$

où t est un paramètre fixé. Ce produit mène à un invariant de nœud classique, le polynôme d'Alexander, en suivant la recette suivante : partant d'un nœud, l'écrire comme clôture d'une tresse à n brins, puis colorier celle-ci en utilisant le produit ci-dessus ; alors les couleurs de sortie seront une combinaison linéaire des couleurs d'entrée. Autrement dit, elles s'obtiennent en multipliant les couleurs d'entrée par une certaine matrice d'ordre n, c'est-à-dire un tableau où l'on range tous les coefficients de la combinaison linéaire. Soustrayez la matrice-unité, puis prenez le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre $n - 1$ de votre matrice : c'est un polynôme en t qui ne dépend que du type d'isotopie du nœud de départ, et c'est lui qu'on nomme le polynôme d'Alexander du nœud (voir *Noué ou pas noué*, par Pierre Tougne, dans ce dossier).

Récemment, à la suite des travaux de Richard Laver, à Boulder au Colorado, de nouveaux exemples de produits autodistributifs ont été construits à partir d'objets purement imaginaires de la théorie des ensembles, à savoir des «grands cardinaux», dont on ne peut pas démontrer l'existence, mais qui ont des propriétés très riches (voir *Les grands cardinaux*, par Jean-Paul Delahaye, *Pour la science* n°224, juin 1996). C'est en utilisant ces nouveaux produits pour colorier les brins des tresses que l'ordre de celles-ci et la méthode de réduction des poignées ont été découverts. Il existe aujourd'hui toute une famille de nouveaux produits autodistributifs, qu'étudie notamment Ales Drápal, à l'Université Charles de Prague : on peut espérer qu'ils mèneront à leur tour vers de nouveaux résultats sur les tresses et les nœuds.

lorsque l'on choisit de toujours réduire la première poignée possible, on verra que celle-ci peut se déplacer vers la droite, revenir soudain à gauche, et effectuer de la sorte plusieurs allers et retours qui paraissent parfaitement imprévisibles *(voir la figure 10)*. *A priori* il se pourrait que les réductions ne se terminent jamais ou bouclent indéfiniment. Cependant, dans tous les cas, les réductions finissent par s'arrêter!

Il n'est pas question d'expliquer ici pourquoi cette méthode est si rapide en moyenne ni même pourquoi elle fonctionne. Ces propriétés sont la conséquence d'un résultat structurel profond sur les tresses, à savoir l'existence d'une certaine relation d'ordre entre celles-ci, qui a été suggérée par des résultats de théorie des ensembles. On a là un exemple d'un calcul simple à décrire, mais dont la validité repose sur un argument délicat – du moins pour le moment : peut-être un lecteur astucieux trouvera-t-il une manière élémentaire de montrer que la réduction des poignées se termine toujours... mais attention aux erreurs!

Les tresses sont au cœur de nombreux problèmes de mathématiques et de physique, en particulier parce que les relations de tresse de l'encadré 2 réapparaissent sous des formes variées. La classification des tresses n'est qu'un des problèmes qui les concernent, et l'un des plus faciles. Plus important que les détails sur l'efficacité pratique de telle ou telle méthode pour le résoudre est le fait que rien n'apparaît au hasard : quel que soit le problème étudié, les méthodes efficaces sont celles qui reposent sur des résultats structurels importants. Dans les quelques résultats qu'on a mentionnés ici, les structures de groupe, d'automate et d'ordre impliqués dans l'étude des tresses jouent un rôle fondamental.

Patrick Dehornoy est professeur de mathématiques à l'Université de Caen, où il dirige le laboratoire Structures Discrètes et Analyse Diophantienne, équipe associée au CNRS.

Les travaux récents du laboratoire sont accessibles sur *Internet* à l'adresse http://www.math.unicaen.fr/.

E. Artin, *Theory of Braids*, in *Annals of Mathematics*, vol. 48, pp. 101-126, 1948.

P. Cartier, *Développements récents sur les groupes de tresses, applications à la topologie et à l'algèbre*, Séminaire Bourbaki, exposé 716, 1989.

P. Dehornoy, *A Fast Method for Comparing Braids*, in *Advances in Mathematics*, n°125, pp. 200-235, 1997.

J.-P. Delahaye, *Les grands cardinaux*, in *Pour la Science*, n° 224, pp. 60-67, 1996.

D. Epstein, *Word Processing in Groups*, Jones & Barlett Publ., 1992.