THÉORIE AXIOMATIQUE DES ENSEMBLES

PATRICK DEHORNOY

Table des matières

La théorie des ensembles est la branche des mathématiques qui étudie les ensembles, spécialement les ensembles infinis, à la façon dont l'arithmétique étudie les nombres entiers et la géométrie les points, les droites et les cercles. Elle est apparue à la fin du XIXe siècle avec les travaux de Cantor, et a donné lieu depuis cette époque à un développement remarquable qui en fait aujourd'hui l'une des branches les plus sophistiquées. Placée un temps à la base de l'édifice mathématique en raison de la possibilité d'y représenter la plupart des objets usuels, la théorie des ensembles occupe aujourd'hui une position plus discrète, notamment parce que ses applications aux autres domaines demeurent relativement modestes. Pour autant, l'importance de ses enjeux intellectuels reste intacte, et les récentes avancées en direction d'une solution au problème du continu constituent des résultats fascinants tant pour le mathématicien que pour le philosophe.

Historiquement, la théorie des ensembles a connu des périodes bien distinctes qui structureront notre présentation : mise en forme progressive d'une théorie de 1880 à 1920, passage à la notion de modèle de ZFC et résultats d'indépendance relative dans les années 1930 à 1960, apparition de nouveaux axiomes depuis les années 1970, émergence d'une vision nouvelle dans les années récentes.

1. Axiomatisation du type ensemble

Elaborer une théorie des ensembles consiste à analyser les propriétés de ceux des objets mathématiques qui sont des ensembles. Comme définir les ensembles à partir d'objets plus primitifs est malaisé, on adopte en général une approche axiomatique. Les premières tentatives, à la fin du XIXe siècle, ayant mené à des difficultés logiques, le système a été progressivement affiné, pour aboutir au système ZFC qui est le point de départ le plus communément accepté aujourd'hui.

1.1. **Le type ensemble.** Certains objets mathématiques sont définis individuellement : le nombre 5, la fonction cosinus. D'autres sont introduits collectivement par une propriété qui ne les spécifie pas entièrement : les racines de l'équation $x^2=1$, les fonctions dérivables. Dans ce cas, on peut restaurer l'unicité en introduisant sous le nom d'*ensemble* les objets collectivement spécifiés, chacun des objets individuels concerné étant alors appelé *élément* de l'ensemble associé : l'ensemble des racines de l'équation $x^2 = 1$, l'ensemble des fonctions dérivables. L'équation $x^2 = 1$ admettant les deux racines entières $+1$ et -1, on ne peut parler de «la» racine ; par contre, on peut parler de façon non ambiguë de l'ensemble des solutions, dont $+1$ et -1 sont les deux éléments.

On pourrait identifier un ensemble avec la propriété qui lui donne naissance, de sorte que des propriétés équivalentes mais distinctes produiraient des ensembles distincts. Ce n'est pas l'approche retenue : par exemple, les racines de $x^2 = 1$ sont aussi les entiers non nuls compris entre -1 et $+1$, et on considère que ces propriétés définissent un seul ensemble. Autrement dit, l'ensemble fait abstraction de la propriété pour ne retenir que les éléments qui la satisfont. Un ensemble est donc déterminé par la liste de ses éléments, et une façon de le spécifier est de donner celle-ci explicitement. On note $\{a_1, ..., a_n\}$ l'ensemble dont les éléments sont a_1,..., a_n : par exemple, l'ensemble $\{-1, +1\}$, qui est aussi $\{+1, -1\}$, a deux éléments, à savoir les nombres -1 et $+1$, et il est à la fois l'ensemble des racines de $x^2 = 1$, l'ensemble des entiers relatifs non nuls compris entre -1 et $+1$, et possède encore bien d'autres définitions.

Comme le montrent les textes mathématiques, il est depuis longtemps apparu commode d'utiliser un vocabulaire ensembliste, en particulier parce que celui-ci permet d'exprimer des propriétés collectives qui ne font pas sens au niveau des éléments individuels.

1.2. **Problèmes ensemblistes.** Il ne suffit pas qu'une notion soit communément utilisée pour qu'il soit nécessaire d'en élaborer une théorie : il n'existe à ce jour aucune théorie générale des suites, bien que celles-ci soient d'un usage très répandu. Ce qui a rendu naturelle, voire indispensable, la création d'une théorie des ensembles, c'est l'apparition, à la fin du XIXe siècle, de problèmes spécifiques mettant en jeu des ensembles, plus précisément des ensembles infinis, devant lesquels les techniques de l'époque restaient inefficaces. On verra qu'un siècle plus tard certains de ces problèmes restent ouverts, mais qu'en même temps leur étude s'est révélée extraordinairement féconde.

Grossièrement, il existe deux types de problèmes ensemblistes : les problèmes à un ensemble, où on se demande si tel ou tel ensemble existe ou est non vide, et les problèmes à deux ensembles, où il s'agit de mettre en relation deux ensembles supposés existants. Pour ces derniers, comme aucune structure additionnelle n'est prise en compte, la seule relation naturelle est la comparaison des tailles, qu'on formalise à l'aide des notions de bijection et d'injection : deux ensembles A, B sont de même taille s'il existe une correspondance bijective entre leurs éléments, et, de même, A est de taille au plus celle de B s'il existe une injection de A dans B. Dans le cas des ensembles finis, on sait qu'on obtient une classification complète à l'aide d'un unique nombre naturel, le cardinal ou nombre d'éléments.

C'est lorsqu'on cherche à étendre cette classification aux ensembles infinis que les problèmes arrivent et que le besoin d'une théorie apparaît. Le point de départ est la démonstration par Georg Cantor en 1873 du résultat qu'il ne peut exister de surjection de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et qu'il existe donc au moins deux tailles d'infini distinctes. Par la suite, en montrant que, quel que soit l'ensemble A, il n'existe pas de surjection de A sur l'ensemble des parties de A, Cantor établit l'existence d'une infinité de tailles d'infini. Par contre, il buta très vite sur le problème dit *du continu* :

- Existe-t-il des tailles intermédiaires entre celle de $\mathbb{N}$ (appelée le dénombrable) et celle de $\mathbb{R}$ (appelée le continu) ?

Soit encore, de façon équivalente : Tout sous-ensemble non dénombrable de $\mathbb{R}$ est-il en bijection avec $\mathbb{R}$? L'*hypothèse du continu* est l'affirmation d'une réponse positive à cette dernière question. Cantor la croyait vraie, mais n'a pu le démontrer, et le problème apparaît en tête de la fameuse liste proposée par Hilbert en 1900. Dans une large mesure, le problème du continu a été le fil conducteur du développement de la théorie des ensembles au cours du XXe siècle, et continue à l'être aujourd'hui. On verra ci-dessous les principales étapes de ce développement, et en particulier les différents points de vue à partir desquels la question a été abordée.

1.3. **Définir les ensembles ?** Une fois constatés le caractère utile de la notion d'ensemble et l'émergence de problèmes spécifiques apparemment difficiles, il est légitime d'en développer une théorie — et c'est ce qui a été fait à partir de la fin du XIXe siècle et des travaux pionniers de Cantor, Bernstein, Schröder, Zermelo, Frege, Skolem, entre autres.

Toute théorie nécessite un point de départ, fixant des règles du jeu et définissant les objets de base. Dans le cas des ensembles, une définition est possible à partir des fonctions indicatrices : par exemple, un ensemble d'entiers peut être défini comme une fonction prescrivant, pour chaque entier, s'il appartient ou non à l'ensemble considéré. Ce style de définition est utilisé dans les langages de programmation pour introduire, pour chaque type d'objet τ, en particulier pour les types énumérés, un type «ensemble de τ». D'un point de vue théorique, les limitations de cette approche sont importantes. Outre qu'elle fait reposer la construction des ensembles sur celle des fonctions, elle se prête mal à l'étude d'ensembles généraux, et semble peu apte à éclairer les questions ouvertes.

Une approche alternative consisterait à définir un ensemble comme classe d'équivalence de propriétés mathématiques. Bien adaptée dans le cas de types spécifiques, par exemple les ensembles d'entiers, cette approche pose des problèmes difficiles dans le cas général, en particulier quant à la nature des objets considérés.

Définir les ensembles apparaissant malaisé, comme il est fréquent avec des objets très basiques, on recourt à la solution alternative usuelle : renoncer à *définir* les objets, et se contenter d'en recenser les propriétés de base pour ensuite explorer les conséquences de celles-ci prises comme point de départ axiomatique. On élude ainsi la question de la nature des objets, pour se concentrer exclusivement sur leur comportement. Par exemple, on sait qu'on peut développer l'arithmétique sur la seule base que les entiers satisfont aux axiomes de Peano, ou, de même, développer la géométrie plane sur la seule base que les points et les droites satisfont aux axiomes d'Euclide. C'est ce type d'approche qui est usuellement adopté pour les ensembles, constituant ainsi le point de départ d'une théorie axiomatique des ensembles.

1.4. **Première ébauche.** A la différence des axiomes de Peano, point de départ usuel pour l'arithmétique, qui sont facilement intelligibles, les axiomes de Zermelo–Fraenkel, qui constituent le point de départ usuel pour la théorie des ensembles, peuvent apparaître compliqués, sinon artificiels. En fait, ces axiomes sont l'aboutissement d'ajustements successifs, et il est probablement utile d'avoir une idée des étapes du processus pour se persuader de leur caractère finalement très naturel. Néanmoins, un lecteur pressé peut admettre qu'il existe (au moins) une façon satisfaisante d'axiomatiser les ensembles, à savoir le système ZFC, et ignorer la suite de ce chapitre.

Si on adopte le point de vue platonicien dont de nombreux mathématiciens se sentent proches, choisir des axiomes pour un type d'objet consiste à explorer l'intuition que nous en avons et à la formaliser dans un langage convenable. Dans le cas des ensembles, l'analyse ci-dessus suggère deux principes, à savoir un principe d'unicité (dit d'*extensionnalité*) : un ensemble est déterminé par ses éléments, et un principe d'existence (dit de *compréhension*) : toute propriété $\mathcal{P}(x)$ donne naissance à un ensemble, l'ensemble des x satisfaisant $\mathcal{P}(x)$, noté $\{x; \mathcal{P}(x)\}$. Noter que la compréhension inclut la possibilité de définir un ensemble par extension : l'ensemble $\{a_1, ..., a_n\}$ est défini en compréhension par la propriété «$x = a_1$ ou ... ou $x = a_n$».

Noter également que les principes précédents se formalisent comme des axiomes portant sur la seule relation d'appartenance $\in$, l'extensionnalité s'exprimant par

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B),$$

et la compréhension pour une propriété $\mathcal{P}$ par

$$\forall p_1 ... \forall p_n \exists A \forall x (x \in A \Leftrightarrow \mathcal{P}(x, p_1, ..., p_n))$$

où on a fait apparaître d'éventuels paramètres figurant dans $\mathcal{P}$. La règle du jeu est alors d'étudier les objets dont les axiomes précédents donnent les propriétés de départ et, notamment, à chercher s'il est possible de résoudre le problème du continu à partir de ces bases.

1.5. **Paradoxes.** Des difficultés surgissent rapidement. La première est illustrée par le paradoxe de Berry. Soit $\mathcal{P}(x)$ la propriété : «x est un entier naturel pouvant être défini par une phrase française d'au plus cent caractères». L'axiome de compréhension pour $\mathcal{P}$ affirme l'existence d'un ensemble A composé des entiers x satisfaisant $\mathcal{P}(x)$. Comme le nombre de phrases françaises d'au plus cent caractères est fini, l'ensemble A est fini, et il existe donc un plus petit entier non dans A. Cet entier N est le plus petit entier ne pouvant être défini par une phrase d'au plus cent caractères. Or, ce qui précède est une définition de N par une phrase française d'au plus cent caractères. L'existence de N, et de là celle de l'ensemble A, sont donc contradictoires : le système formé de l'axiome d'extensionnalité et de tous les axiomes de compréhension est incohérent, et il faut le modifier.

La solution naturelle est d'attribuer le paradoxe au flou de la notion de propriété, et de l'éliminer en restreignant la portée des axiomes de compréhension à celle des propriétés qui peuvent être exprimées par des *formules* d'une logique restant à préciser. Le paradoxe de Berry se réduit alors au fait, intuitif, que la définissabilité par une phrase française n'est pas formalisable.

Mais une seconde difficulté apparaît avec le paradoxe de Russell. Quelle que soit la logique retenue, $x \notin x$ a toutes les chances d'une formule légitime. Or soit A l'ensemble de tous les x satisfaisant $x \notin x$. Alors $A \in A$ est impossible, puisqu'impliquant $A \notin A$ par définition de A, et $A \notin A$ l'est également, puisqu'impliquant de même $A \in A$. L'existence de l'ensemble A est donc une hypothèse contradictoire, et le système formé de l'axiome d'extensionnalité et des axiomes de compréhension associés à toute logique où $x \notin x$ est une formule légitime n'est pas tenable.

Plusieurs solutions sont possibles. L'une est d'attribuer le paradoxe de Russell à la présence de $\in$, et de bannir ce symbole des axiomes de compréhension. Ceci mène à distinguer divers types d'objets, éléments, ensembles, ensembles d'ensembles... Cette approche de *théorie des types* est fructueuse, mais, pour le moment, elle n'a mené qu'à peu de résultats pour l'étude des ensembles. Une autre solution est d'attribuer le paradoxe de Russell à la trop grande taille de la collection considérée : il y a trop d'objets x satisfaisant $x \notin x$ pour que ceux-ci forment un ensemble. On peut éviter le problème en substituant au principe de compréhension celui de *séparation*, l'axiome de séparation pour une formule $F(x)$ étant l'affirmation que, pour tout ensemble A, il existe un ensemble formé par les éléments de A qui satisfont $F(x)$. Noter que la séparation pour $F(x)$ est une forme particulière de compréhension, à savoir la compréhension pour la formule $x \in A$ et $F(x)$ où la variable x est *bornée* par l'ensemble A.

1.6. **Le système de Zermelo.** Ce faisant, on se met à l'abri du paradoxe de Russell : dans le nouveau système réduit à l'extensionnalité et la séparation, celui-ci se traduit simplement par le fait qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles. Mais, en renonçant à la compréhension générale, on n'est plus assuré de l'existence d'aucun ensemble : la séparation ne permet que de construire de nouveaux ensembles à partir d'anciens, et même les définitions en extension ne sont pas légitimées. On réintroduit donc des axiomes de compréhension particuliers, suffisamment peu pour espérer obtenir un système non contradictoire, mais suffisamment néanmoins pour garantir l'existence de tous les ensembles que la pratique mathématique réclame. Pour cela, on ajoute les axiomes dits de la *paire*, de l'*union*, et des *parties*, qui affirment respectivement que, quels que soient a et b, il existe un ensemble dont les éléments sont a et b, un autre dont les éléments sont les éléments des éléments de a (c'est-à-dire qui est l'union de a considéré comme ensemble d'ensembles), et enfin un troisième dont les éléments sont les parties de a, c'est-à-dire les ensembles dont tous les éléments sont éléments de a.

En un sens pouvant être rendu précis, le système obtenu à ce point, composé des axiomes d'extensionnalité, de séparation, de la paire, de l'union et des parties, est, lorsqu'on le complète d'un axiome affirmant l'existence de l'ensemble vide, équivalent au système de Peano pour l'arithmétique. Or l'usage mathématique, et l'intuition qui l'accompagne, recommandent encore l'introduction d'ensembles infinis que le système précédent ne permet pas de construire. On ajoute donc un nouvel axiome, dit de l'*infini*, affirmant l'existence d'au moins un ensemble infini — ce qui rend superflu un axiome posant l'existence de l'ensemble vide, laquelle se déduit alors par exemple de l'axiome de séparation associé à la formule $x \neq x$.

Pour être complète, la description doit encore préciser le type de formule mis en jeu dans les axiomes de séparation, en particulier les relations et opérations pouvant y figurer. L'option retenue est spartiate : les seules formules autorisées sont les formules du premier ordre — c'est-à-dire les formules mathématiques usuelles, quantifications comprises — écrites à partir de la seule relation d'appartenance. Donc, en particulier, tout axiome de séparation pour une formule où figureraient des entiers ou des réels est *a priori* illégitime. On verra plus loin que cette restriction ne limite pas vraiment le champ de la théorie, l'option se trouvant ainsi justifiée *a posteriori*. Par contre, on montre qu'il est légitime d'utiliser dans les formules de séparation toutes les notions pouvant être définies à partir de l'appartenance, telles l'inclusion $\subseteq$, l'union $\cup$ ou l'ensemble des parties $\mathfrak{P}$. Le système ainsi obtenu est appelé *système de Zermelo*.

1.7. **Le système de Zermelo–Fraenkel.** Le système de Zermelo permet de rendre compte de l'existence de la plupart des ensembles utiles à la pratique mathématique, et il offre un cadre axiomatique satisfaisant pour fonder une théorie des ensembles. Néanmoins le développement de cette dernière a conduit à amender encore le système en lui ajoutant plusieurs nouveaux axiomes, qu'on va décrire maintenant, pour parvenir au système ZFC.

Soit A un ensemble. Par l'axiome de la paire, il existe pour chaque élément x de A un singleton $\{x\}$. Peut-on affirmer l'existence d'un ensemble B formé par les ensembles $\{x\}$ pour x dans A ? Comme l'opération $\{\ \}$ sort de A, il n'est pas clair que les axiomes posés à ce point garantissent l'existence d'un ensemble contenant tous les ensembles $\{x\}$ souhaités. Or, dans la mesure où le paradoxe de Russell est attribué à la taille excessive d'un ensemble de tous les ensembles et où on ne cherche à écarter que les collections trop grandes, il est naturel d'admettre l'existence d'un ensemble tel que B ci-dessus, puisque celui-ci n'a pas plus d'éléments que A. Dans le cas de B, il n'y a en fait pas de problème, mais, pour couvrir tous les cas similaires, on adjoint une nouvelle famille d'axiomes, dits de *remplacement*, affirmant que, si $F(x, y)$ est une formule fonctionnelle, c'est-à-dire telle que, pour chaque x il existe au plus un y vérifiant $F(x, y)$, alors l'image par F d'un ensemble est un ensemble.

L'ajout suivant procède d'une perspective différente. Il s'agit de l'axiome de *fondation* qui postule que tout ensemble est pur, au sens où il appartient à la clôture de l'ensemble vide $\varnothing$ par union et passage à l'ensemble des parties : par exemple, $\{\varnothing\}$ et $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ sont des ensembles purs. L'intuition ne recommande nullement ce principe : il n'y a par exemple aucune évidence intuitive à ce que l'ensemble $\mathbb{N}$ soit pur. En fait, ajouter l'axiome de fondation ne correspond pas à affirmer, contre l'intuition, que tous les ensembles sont purs, mais simplement à restreindre l'étude des ensembles à ceux d'entre eux qui sont purs. Il s'agit là d'une hypothèse simplificatrice bénigne qui, en limitant le champ des ensembles considérés, facilite leur étude sans pour autant diminuer la portée des résultats, ainsi qu'il apparaît *a posteriori*.

Le système ainsi obtenu est appelé *système de Zermelo-Fraenkel*, abrégé en ZF. On retiendra qu'il s'agit essentiellement d'une mise en forme des principes de Cantor, extensionnalité et compréhension, affinés pour échapper aux paradoxes.

Il est usuel d'ajouter à ZF un dernier axiome, dit *axiome du choix*, et de noter ZFC le système ainsi obtenu. L'axiome du choix affirme que tout produit d'ensembles non vides est non vide, et c'est un nouveau principe d'existence d'ensemble qui n'est pas la réintroduction de certains des axiomes de compréhension précédemment écartés. Cet axiome a suscité des polémiques au début du XXe siècle, portant sur la nature des objets mathématiques qu'on souhaite considérer. Dans le contexte de la théorie des ensembles, où on se propose d'explorer une sorte de cadre maximal aussi peu restrictif que possible, il est raisonnable et techniquement commode d'adopter l'axiome du choix — sans que cela préjuge de l'opportunité de l'utiliser dans la pratique mathématique.

2. Développement de la théorie des ensembles

La règle du jeu est dès lors claire : ayant adopté (au terme d'une analyse longue mais dont les options devraient apparaître naturelles) le système ZFC comme point de départ axiomatique, on se propose maintenant d'étudier les objets dont ce système garantit l'existence, à savoir des ensembles purs particuliers. L'intérêt d'une étude pouvant au départ paraître artificielle ou restrictive va être multiplié par la possibilité de représenter par des ensembles purs non seulement tous les ensembles, purs ou non, mais aussi les plupart des objets mathématiques usuels, ensembles ou non. Ce résultat fondamental donne au type ensemble et à la théorie ZFC une place singulière dans l'édifice mathématique.

2.1. **Les ordinaux.**

La première étape du développement de la théorie des ensembles est la construction des *ordinaux*, une famille d'ensembles qui inclut une copie de la suite des entiers naturels et en constitue un prolongement transfini.

Précisément, on démontre à partir des axiomes de ZFC l'existence d'une suite ordonnée d'ensembles purs appelés ordinaux et vérifiant les propriétés suivantes :

• Il existe un plus petit ordinal, chaque ordinal a un successeur immédiat, et tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure qui est un ordinal ;

• Les prédécesseurs d'un ordinal forment un ensemble bien ordonné (c'est-à-dire tel que toute partie non vide possède un plus petit élément) ; inversement, tout ensemble bien ordonné est isomorphe aux prédécesseurs d'un unique ordinal.

• Les ordinaux sont munis de deux opérations $+$ et $\times$, satisfaisant aux identités suivantes : $\alpha+\underline{0} = \alpha$, $\alpha+(\beta+\underline{1}) = (\alpha+\beta)+\underline{1}$, $\alpha + \sup_{\beta<\lambda}\beta = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$, $\alpha \times \underline{0} = \underline{0}$, $\alpha \times (\beta + \underline{1}) = \alpha \times \beta + \alpha$, $\alpha \times \sup_{\beta<\lambda}\beta = \sup_{\beta<\lambda}(\alpha \times \beta)$, où $\underline{0}$ désigne le plus petit ordinal, et $\underline{1}$ le successeur immédiat de $\underline{0}$.

Les ordinaux jouent un rôle technique central dans toute la théorie des ensembles : l'induction sur les ordinaux est l'argument privilégié d'un grand nombre de démonstrations en théorie des ensembles, et, par ailleurs, les axiomes de ZFC légitiment les définitions par *récursion ordinale* : si une formule $F(x, y)$ est telle que, pour tout x, il existe exactement un y vérifiant $F(x, y)$, alors il existe une suite (x_α) indexée par les ordinaux telle que, pour chaque α, la valeur x_α est l'image par F de la suite des x_β pour $\beta < \alpha$.

2.2. **Représentation par des ensembles.** *A priori*, les ensembles purs pour l'étude desquels le système ZFC est pertinent sont des ensembles très particuliers : il existe certainement de nombreux ensembles qui ne sont pas purs, et de nombreux objets mathématiques qui ne sont pas des ensembles. Le miracle de la théorie des ensembles est la possibilité de construire, à l'intérieur de l'univers des ensembles purs, une copie de la plupart des objets mathématiques usuels.

Les axiomes de ZFC prouvent l'existence d'ordinaux infinis, puis celle d'un plus petit ordinal infini, traditionnellement noté ω et borne supérieure des ordinaux finis. Comme la somme et le produit de deux ordinaux finis est un ordinal fini, $+$ et $\times$ induisent des opérations bien définies sur ω, et on montre que $(\omega, +, \times)$ satisfait aux axiomes de Peano. Ceci ne signifie *pas* que les ordinaux finis soient les entiers naturels, mais garantit qu'ils se comportent comme les entiers. En particulier, pour chaque entier n, on peut définir l'ordinal fini $\underline{n}$ comme $\underline{1} + \underline{1} + ... + \underline{1}$, n fois $\underline{1}$, et le voir comme une représentation de n dans le monde des ensembles purs.

On sait que la plupart des objets mathématiques, entiers relatifs, rationnels, réels... peuvent être construits à partir des entiers naturels. A partir de la représentation des entiers naturels, on construit de proche en proche, pour chaque objet usuel a, une copie $\underline{a}$ de a dans le monde des ensembles purs.

Techniquement, il est nécessaire de savoir représenter par des ensembles (purs) deux types d'objet qui *a priori* ne sont pas des ensembles, à savoir les couples et les fonctions. Comme pour les entiers, il s'agit de définir des ensembles qui se comportent comme les objets qu'ils représentent. Pour les couples, les seules propriétés requises sont que deux éléments quelconques déterminent un couple et qu'inversement un couple détermine sans ambiguïté un premier et un second élément. Or, en présence des axiomes de ZFC, l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ détermine a et b de façon unique : on peut donc sans danger représenter le couple (a, b) par l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Quant aux fonctions, on peut représenter une fonction f par son graphe, c'est-à-dire par l'ensemble des (représentations des) couples $(x, f(x))$, donc par l'ensemble des ensembles $\{\{x\}, \{x, f(x)\}\}$ pour x dans le domaine de f.

On sait alors qu'on peut construire les entiers relatifs comme classes d'équivalence de couples d'entiers naturels. Une fois les entiers naturels représentés par des ensembles purs, en l'occurrence les ordinaux finis, et les couples d'ensembles par des ensembles, on peut effectuer à l'intérieur du monde des ensembles la construction d'un ensemble $\underline{\mathbb{Z}}$ contenant pour chaque entier relatif a un ensemble $\underline{a}$ qui en est la copie. En particulier, l'ensemble $\underline{\mathbb{Z}}$ est muni d'opérations $\underline{+}$ et $\underline{\times}$ qui ont toutes les propriétés de l'addition et de la multiplication des entiers relatifs. Quelle que soit notre intuition des entiers, il n'y a aucune raison de penser qu'un entier relatif *soit* un ensemble de couples d'ordinaux finis ; par contre, pour ce qui est des propriétés, les objets ainsi construits sont indiscernables de ceux qu'ils représentent, et il n'y a aucun danger technique à les identifier.

La construction se poursuit de même : on peut successivement représenter par des ensembles purs les nombres rationnels, puis les nombres réels, puis les nombres complexes, puis les fonctions sur ces nombres et, de là, tous les objets de l'analyse mathématique, puis, par l'intermédiaire de coordonnées, tous les objets de la géométrie. Ainsi, on obtient, pour chaque objet mathématique usuel x, une contrepartie $\underline{x}$ de cet objet dans le monde des ensembles qui en mime toutes les propriétés.

2.3. **La théorie des ensembles comme théorie des fondements.** L'intérêt de la représentation précédente est considérable. Au départ, les mathématiques apparaissent comme un domaine diffus où les investigations portent sur une multiplicité d'objets de natures apparemment très diverses. La possibilité de représenter tous les objets mathématiques usuels par des ensembles permet d'unifier ce cadre et, au moins en théorie, de ramener les mathématiques à l'étude d'un seul type d'objet, les ensembles.

Un des bénéfices de cette unification concerne les questions de fondement des mathématiques. L'objectif est de décrire un système formel à l'intérieur duquel toutes les constructions puissent être légitimées et qu'on espère à l'abri des contradictions. Au départ, la multiplicité des types d'objets semble rendre le problème insoluble. La possibilité de représenter tous les objets mathématiques par des ensembles (purs) ramène le problème général au problème, apparemment plus simple, du fondement de la seule théorie des ensembles. Or, pour cette dernière, on vient de proposer un cadre axiomatique adapté, à savoir le système ZFC. Ainsi, le problème de fondement des mathématiques se trouve ramené au seul problème de l'absence de contradiction dans le système ZFC — ce qui est certainement satisfaisant pour l'esprit.

2.4. **Non-contradiction de ZFC : les limites.** En fait, pour ce qui est de la cohérence de l'édifice mathématique — et contrairement aux espoirs naïfs de Hilbert il y a un siècle — il n'est pas certain que la représentation des objets mathématiques comme ensembles soit un gain décisif. En effet, Kurt Gödel a montré au début des années 1930 des résultats négatifs limitant drastiquement les espoirs dans cette direction. Le (second) théorème d'incomplétude affirme que l'absence de contradiction dans le système ZFC ne peut *pas* être établie à l'intérieur de ce système (sauf s'il est contradictoire). Il est donc possible d'adopter ZFC comme point de départ unifié de la théorie des ensembles et des mathématiques, mais il ne saurait être exclu que le système recèle une contradiction. L'argument de Gödel n'illustre pas une faiblesse spécifique du système ZFC : la même limitation vaut pour tout système suffisamment puissant pour que l'arithmétique puisse y être représentée, et il serait donc illusoire d'espérer y échapper en ajoutant de nouveaux axiomes ou en modifiant les axiomes existants. Aussi longtemps qu'on accepte le cadre métamathématique des démonstrations dans la logique dite du premier ordre, il ne saurait y avoir de démonstration de cohérence intrinsèque du monde mathématique.

Les limitations précédentes relativisent l'intérêt théorique de la représentation par des ensembles en termes de fondements. Par ailleurs, il convient aussi de souligner la possibilité de bâtir l'édifice mathématique à partir d'autres types de base que les ensembles. En particulier, la théorie des catégories offre une alternative séduisante en ce qu'elle place la notion de morphisme et les phénomènes géométriques à la base de l'édifice. Une autre approche est fournie par le lambda-calcul, où la notion de base est celle de fonction, considérée comme procédure d'évaluation et non comme collection de couples. Cette représentation ne prétend pas à la même universalité que la théorie des ensembles, mais, en contrepartie, elle prend mieux en compte les questions d'effectivité (tout comme les approches dites de théorie constructuve des ensembles). Mentionnons aussi qu'il a été suggéré de faire jouer aux probabilités un rôle fondateur, même si, pour le moment, aucun système concret n'a vraiment émergé dans cette direction. Il n'y a pas lieu d'opposer ces diverses approches, dont chacune est adaptée à certains aspects d'un édifice mathématique divers et complexe, et dont aucune n'a vocation à éclipser les autres.

3. Résultats d'indépendance relative

Quels que soient le rôle accordé aux ensembles dans les problèmes de fondement et les limites fixées par le théorème d'incomplétude de Gödel, on dispose avec le système ZFC d'une solide base axiomatique pour élaborer une théorie des ensembles et aborder les questions laissées en suspens dans la première partie, en particulier les problèmes concernant les cardinalités infinies. L'étude de ces questions a mené à de remarquables développements — sans parvenir néanmoins à élucider le statut du problème du continu.

3.1. **Cardinaux et continu.** Dans toute la suite, il sera question de propriétés des ensembles purs démontrées (ou non) à partir des axiomes du système ZFC, et en particulier des propriétés des ensembles purs qui sont les contreparties des entiers, réels, et autres objets mathématiques usuels. Comme il est d'usage, on ne distinguera plus entre ces objets et leur représentation comme ensembles purs, écrivant donc 0 pour $\underline{0}$, 1 pour $\underline{1}$, ou $\mathbb{R}$ pour $\underline{\mathbb{R}}$. Pour autant, il serait malencontreux d'oublier que, tout au moins du point de vue retenu dans cet article, il ne s'agit là que d'une convention sans prétention ontologique.

Revenons alors aux problèmes de cardinalité. Il est d'abord facile de démontrer à partir des axiomes de ZFC tous les résultats usuels de dénombrement fini, ainsi que les résultats élémentaires concernant les dénombrements infinis, par exemple l'existence de bijections entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, et, d'autre part, entre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

L'axiome du choix implique que tout ensemble est en bijection avec un ordinal (théorème de Zermelo), de sorte que, si alors on appelle *cardinal* un ordinal qui n'est en bijection avec aucun ordinal plus petit que lui-même, tout ensemble est en bijection avec un unique cardinal, qu'on appelle son cardinal. Deux ensembles sont donc en bijection si et seulement si ils ont le même cardinal : le cardinal correspond bien à la notion intuitive de nombre d'éléments.

Les ordinaux finis, désormais identifiés aux entiers naturels, sont des cardinaux. Par contre, tous les ordinaux infinis ne sont pas des cardinaux. L'ordinal ω, premier ordinal infini, est un cardinal, puisque, par définition, il n'est pas fini, donc pas en bijection avec un ordinal fini. Par contre, l'ordinal $\omega+1$, qui est obtenu en ajoutant, après tous les entiers, un élément supplémentaire x n'est pas un cardinal : en envoyant 0 sur x, et chaque entier n strictement positif sur $n-1$, on définit une bijection de ω sur $\omega+1$. D'une façon générale, tout ordinal dénombrable qui n'est pas ω n'est pas un cardinal, et c'est le cas de $\omega+\omega$, ou de $\omega\times\omega$.

Par contre, les axiomes de ZFC entraînent l'existence d'un cardinal non dénombrable, de même plus généralement que l'existence, pour chaque cardinal, d'un cardinal strictement plus grand. Il existe alors une (unique) énumération croissante des cardinaux infinis, notés $\aleph_\alpha$ («aleph alpha») depuis Cantor. Ainsi $\aleph_0$ est, par définition, le plus petit des cardinaux infinis, donc c'est ω. Ensuite, $\aleph_1$ est le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$, autrement dit c'est le plus petit ordinal non dénombrable, puis $\aleph_2$ est le plus petit ordinal infini qui n'est en bijection ni avec $\aleph_0$, ni avec $\aleph_1$, *etc.* Avec ces notations, on a donc des égalités comme

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0.$$

Si A est un ensemble fini de cardinal n, le cardinal de l'ensemble des parties de A est 2^n. Par analogie, pour chaque cardinal infini κ, on définit 2^κ comme le cardinal de l'ensemble des parties de κ, et, plus généralement, si κ et λ sont des cardinaux non tous deux finis, on définit λ^κ comme le cardinal de l'ensemble des fonctions de κ dans λ. On a vu que l'ensemble $\mathbb{R}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$, et, par conséquent, on a

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathbb{C}) = 2^{\mathrm{card}(\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0}.$$

Le *problème du continu* est celui de la détermination du cardinal $2^{\aleph_0}$: par construction, tout cardinal infini est un aleph, et déterminer $2^{\aleph_0}$, c'est trouver l'unique ordinal α vérifiant $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. En vertu du théorème de Cantor, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, et on a donc $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$. L'hypothèse du continu, souvent abrégée en HC, est l'affirmation que le cardinal de $\mathbb{R}$ est le successeur immédiat du dénombrable : avec nos notations, c'est donc l'affirmation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

3.2. **Exponentiation cardinale.** Le problème du continu est le premier cas du problème général de déterminer la valeur de $2^{\aleph_\alpha}$, lui-même lié au problème *a priori* encore plus général de déterminer $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha}$ pour tous α, β.

De nombreux résultats sur la puissance et l'exponentiation cardinales ont été établis au cours du XXe siècle. D'abord, on montre que, bien qu'apparemment plus générale, la fonction exponentiation (à deux variables) se ramène à la seule fonction puissance (à une variable). Ensuite on établit diverses contraintes satisfaites par cette dernière. Par exemple, le théorème de Cantor interdisant toute surjection d'un ensemble sur son ensemble des parties se traduit par l'inégalité $2^{\aleph_\alpha} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$.

Un grand nombre de résultats ont été établis, souvent au prix de démonstrations subtiles. Ainsi, par exemple, appelant *hypothèse du continu généralisée* (HCG) en $\aleph_\alpha$ la relation $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, c'est-à-dire l'affirmation que $2^{\aleph_\alpha}$ prend la plus petite valeur possible, on observe un phénomène de continuité en $\aleph_{\aleph_1}$, et plus généralement en tout cardinal $\aleph_\alpha$ tel que l'ordinal α est plus petit que $\aleph_\alpha$ et ne peut être approximé par une suite dénombrable (cardinal dit singulier de cofinalité non dénombrable) : si HCG est vraie en tout cardinal plus petit que $\aleph_\alpha$, alors HCG est vraie en $\aleph_\alpha$ (Silver, 1975).

Pour les cardinaux singuliers de cofinalité dénombrable, les résultats sont beaucoup plus délicats ; le meilleur connu à ce jour affirme que, si HCG est vraie en tout cardinal plus petit que $\aleph_{\aleph_0}$, alors $2^{\aleph_{\aleph_0}}$ est au plus $\aleph_{\aleph_0+4}$ («pcf theory», Shelah, 1994).

Ces résultats relient entre elles diverses valeurs de la fonction puissance, mais ne déterminent aucune valeur individuellement, et en particulier ne donnent aucune indication sur la valeur de $2^{\aleph_0}$. Cette situation se retrouve dans de nombreux problèmes ensemblistes, la théorie ZFC s'étant révélée beaucoup plus riche en résultats de comparaison montrant que tel ou tel problème est équivalent à tel autre, plutôt qu'en résultats de décision apportant une solution directement positive ou négative à une question ouverte. Comme on le verra dans la suite, il s'agit là d'une manifestation du caractère intrinsèquement incomplet du système ZFC.

3.3. **Gödel et Cohen.** Ne pas réussir, malgré les efforts déployés, à démontrer ou à réfuter l'hypothèse du continu pourrait n'être que le signe d'une malhabileté. En fait, il n'en est rien, et c'est un des grands succès de la théorie des ensembles au XXe siècle d'avoir trouvé les moyens de le démontrer. Pour cela, il a fallu opérer un changement complet de point de vue et développer une nouvelle théorie des ensembles basée sur la notion de modèle de ZFC. Concernant l'hypothèse du continu, les deux résultats principaux sont les suivants :

- Sauf si elle est contradictoire, la théorie ZFC ne réfute pas l'hypothèse du continu, c'est-à-dire qu'il ne peut pas exister de démonstration de la négation de HC à partir des axiomes de ZFC (Gödel, 1938).
- Sauf si elle est contradictoire, la théorie ZFC ne prouve pas l'hypothèse du continu, c'est-à-dire qu'il ne peut pas exister de démonstration de HC à partir des axiomes de ZFC (Cohen, 1963).

On va expliquer le principe de démonstration pour ces deux résultats négatifs. Pour cela, un parallèle avec la théorie des corps est opportun. Notons TC les axiomes de la théorie des corps, c'est-à-dire les énoncés exprimant que deux opérations $+$ et $\times$ définissent un corps, au sens de l'algèbre ; notons de même CO l'énoncé exprimant que la multiplication est commutative, et considérons la question : les axiomes TC prouvent-ils l'énoncé CO ou sa négation ?

La réponse est négative : TC ne prouve ni CO, ni sa négation. Pour démontrer que TC ne prouve pas CO, il suffit d'exhiber un exemple d'un corps non commutatif : si les axiomes TC impliquaient CO, alors tout corps, qui par hypothèse satisfait les axiomes de TC, satisferait aussi CO, c'est-à-dire serait commutatif. De même, pour montrer que TC ne prouve pas la négation de CO, il suffit d'exhiber un exemple de corps commutatif : si TC prouvait la négation de CO, tout corps satisferait cette dernière, c'est-à-dire serait non commutatif. Comme le corps des quaternions est un corps non commutatif, et que le corps des rationnels est commutatif, on conclut que TC ne prouve ni CO, ni sa négation.

3.4. **La notion de modèle de ZFC.** Les arguments précédents sont faciles, car la notion de corps est familière, et construire un corps avec telle ou telle propriété est une opération conceptuellement aisée. Adapter ce qui précède au cas des axiomes de ZFC et de l'hypothèse du continu n'est pas si facile, car cela requiert d'introduire une notion qui, par rapport aux axiomes ZFC, joue le même rôle que les corps par rapport aux axiomes de TC. Cette notion est celle de *modèle* de ZFC. Par définition, on appelle corps toute structure munie de deux opérations satisfaisant aux axiomes de TC ; de même, on appellera *modèle* de ZFC toute structure satisfaisant aux axiome de ZFC. Comme les axiomes de ZFC mettent en jeu une unique relation binaire $\in$, un modèle de ZFC est une structure composée d'un ensemble et d'une unique relation binaire, donc de la forme (M, E) avec E relation binaire sur M. On ne requiert pas que la relation E soit la relation d'appartenance, mais seulement que chacun des axiomes de ZFC soit satisfait lorsque les variables prennent des valeurs dans M et que le symbole $\in$ est interprété par E. Par exemple, dire que (M, E) satisfait l'axiome d'extensionnalité signifie qu'un élément de M est déterminé par tous ses E-prédécesseurs : si a et b sont deux éléments distincts de M, il doit exister au moins un x vérifiant xEa et pas xEb, ou xEb et pas xEa.

Un modèle de ZFC est nécessairement un objet très compliqué puisque, d'après les résultats de la deuxième partie, la plupart des objets mathématiques peuvent s'y représenter : chaque modèle de ZFC doit inclure sa propre version des entiers, des réels, *etc.* — et rien n'oblige à ce que ces entiers coïncident, ni même soient en bijection, avec les vrais entiers.

Il existe un candidat naturel pour être un modèle de ZFC, à savoir la structure $(V, \in)$ constituée des ensembles purs et de l'appartenance : que les axiomes de ZFC y soient satisfaits est simplement la traduction du consensus sur les propriétés des ensembles purs — tout comme le fait que la structure $(\mathbb{N}, +, \times)$ soit un modèle des axiomes de Peano reflète un consensus sur les propriétés de base des nombres entiers. En fait, et même si l'idée reste correcte, $(V, \in)$ n'est pas formellement un modèle car il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles et V n'est donc pas un ensemble.

Existe-t-il des modèles de ZFC ? Le théorème de complétude de Gödel assure que, sauf si ZFC est contradictoire, il doit en exister des modèles, et même des modèles dont le domaine est dénombrable — ce qui paraît paradoxal, mais reflète simplement l'absence de relation, pour un objet d'un modèle (M, E), entre sa cardinalité au sens de (M, E) et sa cardinalité au sens du monde ambiant $(V, \in)$, les deux modèles ne contenant pas les mêmes bijections, et la notion-même de bijection ne correspondant pas aux mêmes objets. D'un autre côté, le théorème d'incomplétude interdit qu'on puisse construire explicitement un modèle à partir des objets usuels. En effet, si on pouvait par exemple définir sur les nombres réels une relation E astucieuse telle que $(\mathbb{R}, E)$ soit un modèle de ZFC, alors on aurait une preuve de la non-contradiction de ZFC à partir des propriétés usuelles de $\mathbb{R}$, et, puisque les réels peuvent être représentés et toutes leurs propriétés démontrées dans ZFC, on en déduirait une preuve de la non-contradiction de ZFC à partir de ZFC, ce qu'interdit le théorème d'incomplétude — sauf à supposer contradictoires les propriétés usuelles de $\mathbb{R}$, hypothèse catastrophique qui mettrait à bas presque tout l'édifice mathématique, à commencer par ZFC et $\mathbb{R}$. Malgré tout, on pourra réfléchir à un exemple simple qui satisfait tous les axiomes de ZFC à l'exception, essentielle, de l'axiome de l'infini, à savoir la structure $(\mathbb{N}, E)$, où pEq signifie qu'il y a un 1 en position p dans le développement binaire de q.

L'introduction de la notion de modèle de ZFC est le véritable point de départ de la théorie des ensembles moderne. En permettant de considérer plusieurs modèles à la fois, en particulier de construire des sous-modèles et des extensions de modèles, elle autorise un changement de point de vue complet sur la théorie des ensembles — tout comme l'introduction des géométries non euclidiennes a révolutionné l'approche de la géométrie.

3.5. **Modèles intérieurs.** Considérons d'abord le théorème de Gödel affirmant que ZFC ne prouve pas la négation de l'hypothèse du continu. Suivant l'exemple des corps et de la commutativité, pour démontrer le résultat, il suffit de construire un modèle de ZFC satisfaisant HC — de la même façon que, pour démontrer que les axiomes de corps ne prouvent pas la non-commutativité de la multiplication, il suffit de construire un corps commutatif. Le problème est qu'il est facile de construire un corps alors qu'on a vu qu'on ne peut pas espérer construire *ex nihilo* un modèle de ZFC. Or, dans le cas des corps, on peut montrer l'existence d'un corps commutatif en raisonnant comme suit : soit K un corps quelconque, commutatif ou non ; alors, dans tous les cas, K possède un sous-corps commutatif, par exemple son sous-corps premier qui est le plus petit corps inclus dans K. Ainsi, meme si on ne savait pas construire de corps explicitement, on pourrait affirmer que, pour autant qu'il existe un corps, il existe un corps commutatif.

Le principe de la démonstration de Gödel est le même. Il consiste à montrer que tout modèle M de ZFC possède une sous-structure $L(M)$ qui est aussi modèle de ZFC et de surcroît satisfait HC. L'idée est que $L(M)$ est une sorte de sous-modèle premier de M, ne contenant que les éléments dits *constructibles* qui sont inévitables car définis univoquement par des formules d'une certaine forme syntaxique simple. Et il se trouve que, de même qu'on peut montrer que le sous-corps premier d'un corps quelconque est toujours commutatif, on peut montrer que le sous-modèle premier d'un modèle quelconque de ZFC satisfait toujours l'hypothèse du continu. Le théorème de non-prouvabilité en résulte : si ZFC est non-contradictoire, alors par le théorème de complétude il existe au moins un modèle de ZFC, donc, d'après ce qui précède, au moins un modèle de ZFC+HC, et donc c'est que ZFC ne prouve pas la négation de HC.

La construction du modèle $L(M)$ est possible même si on ne suppose pas que le modèle initial M satisfait l'axiome du choix. Par contre, dans tous les cas, le modèle $L(M)$ satisfait l'axiome du choix, et le même argument que pour HC permet de déduire que, pour autant qu'il soit non-contradictoire, le système ZF ne prouve pas la négation de l'axiome du choix. Autrement dit : si ZF n'est pas contradictoire, alors ZFC ne l'est pas non plus. Au moins en partie, ce théorème clôt la controverse du début du XXe siècle sur l'axiome du choix, puisqu'il en démontre l'innocuité. Malgré tout, ce n'est là qu'un des aspects de la question, puisque le théorème n'indique rien sur l'opportunité d'adopter l'axiome du choix, laquelle ne saurait qu'être objet de consensus et non de démonstration.

L'étude des ensembles constructibles mène à d'autres applications liées au phénomène d'*absoluité*. Si K est sous-corps d'un corps L, alors les propriétés de K et L peuvent différer considérablement, mais quelques propriétés de base restent nécessairement inchangées, par exemple la caractéristique. De même, si un modèle L de ZFC est un sous-modèle d'un modèle M, quelques propriétés simples restent *absolues* entre L et M au sens où, si un des modèles les vérifie, il en est nécessairement de même de l'autre. En particulier, est absolue toute propriété pouvant être exprimée par une formule dite de type Σ_1, à savoir une formule où toutes les quantifications, sauf éventuellement une quantification existentielle initiale, sont des quantifications bornées $\exists x \in y$ ou $\forall x \in y$, par opposition à des quantifications générales $\exists x$ ou $\forall x$. Une conséquence est que toute propriété pouvant être exprimée par une formule Σ_1 et démontrable à l'aide de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu est démontrable sans ceux-ci. En effet, supposons F démontrable à partir de ZFC+HC. Soit M un modèle quelconque de ZF. Par hypothèse F est vraie dans tout modèle de ZFC+HC, donc en particulier dans le modèle $L(M)$. Par absoluité, F est vraie dans M, et donc, par le théorème de complétude, F est prouvable à partir de ZF puisqu'elle est vraie dans tout modèle de ZF. Le champ d'application de ce qui précède est malheureusement assez limité — par exemple, l'hypothèse du continu en est exclue — mais il inclut de nombreuses propriétés arithmétiques, telle l'hypothèse de Riemann : donc, si jamais on trouve une démonstration de cette dernière utilisant l'hypothèse du continu, alors on peut mécaniquement éliminer HC de la démonstration. Il est hélas douteux que ce genre de remarque fasse progresser grandement la démonstration elle-même...

3.6. **Extensions génériques.** La méthode de Gödel, dite des modèles intérieurs, a été utilisée avec succès pour montrer que les axiomes de ZFC ne réfutent pas l'hypothèse du continu. L'analogie avec les corps aide à saisir pourquoi cette méthode ne saurait être utile pour montrer le résultat symétrique, à savoir que ZFC ne prouve pas HC : partant d'un corps quelconque, on peut toujours en trouver un sous-corps commutatif ; par contre, tout sous-corps d'un corps commutatif étant commutatif, construire un corps non commutatif à partir d'un corps quelconque K ne peut se faire en utilisant exclusivement des sous-corps de K, et il faut donc nécessairement passer à des extensions de K. De même, tout sous-modèle d'un modèle minimal de type $L(M)$ est lui-même de type $L(M)$, donc vérifie l'hypothèse du continu, et, par conséquent, on ne peut espérer construire un modèle ne satisfaisant pas HC en se restreignant aux sous-modèles d'un modèle quelconque dont rien ne garantit *a priori* qu'il ne soit pas de type minimal.

Conceptuellement, il est facile de comprendre ce que peut être une extension d'un modèle M de ZFC, à savoir un modèle N dont M soit sous-modèle. Le problème est de *contrôler* les propriétés d'une extension, c'est-à-dire, à partir d'un modèle M, d'en construire une extension possédant telle ou telle propriété, par exemple que le cardinal de $\mathbb{R}$ y est $\aleph_2$ et non $\aleph_1$.

Ce problème est techniquement redoutable, et ce fut le génial apport de Paul Cohen en 1963 de décrire une méthode générale pour le résoudre. L'idée est similaire à celle des extensions algébriques de corps, où, partant d'un corps de base K, on construit une extension $K[\alpha]$ en prescrivant à α d'être racine d'un polynôme $P(x)$ à coefficients dans K, et où les éléments de $K[\alpha]$ sont décrits à l'intérieur de K par des polynômes. Dans la méthode de Cohen, on construit une extension $M[G]$ en ajoutant à un modèle M un unique ensemble G dit *générique* dont les propriétés sont spécifiées par un ensemble partiellement ordonné P. Les éléments de P, appelés *conditions*, donnent des fragments d'information sur l'ensemble G qu'on se propose d'ajouter — on parle d'ensemble *générique* car G n'a pas d'autres propriétés que celles spécifiées par l'ensemble des conditions, de même que, dans la construction du corps de rupture $K[\alpha]$, l'élément α n'a pas d'autre propriété que d'être racine de $P(x)$. Typiquement, si on se propose d'ajouter au modèle M un nouveau sous-ensemble G de $\mathbb{N}$, une condition peut être une information du type «3 est dans G et 5 n'y est pas». Le tour de force réussi par Cohen est d'avoir montré comment organiser ces fragments d'information de façon à obtenir un modèle de ZFC. Techniquement, le point important est l'existence d'une relation dite de *forcing* $p \Vdash F$ («p force F») entre conditions et formules de sorte qu'une formule F est vraie dans l'extension $M[G]$ si et seulement si il existe dans G une condition forçant F. On peut par exemple deviner que, si p est la condition écrite plus haut, alors par exemple p force $3 \in G$.

La méthode de Cohen permet, à partir d'un modèle M de ZFC+HC, de construire un nouveau modèle $M[G]$ dans lequel G est une suite de $\aleph_2$ nombres réels, de sorte que $M[G]$ est un modèle de ZFC plus la négation de HC. Il y a là un point délicat : il ne suffit pas d'ajouter une suite dont la longueur calculée dans M soit $\aleph_2$, mais il faut encore que cette suite conserve sa cardinalité $\aleph_2$ dans $M[G]$: comme le modèle $M[G]$ contient plus d'ensembles que M, il se pourrait qu'il contienne en particulier de nouvelles bijections et que le cardinal $\aleph_2$ calculé dans M soit dans $M[G]$ en bijection avec $\aleph_1$. Une fois tous ces détails réglés, on obtient le théorème de Cohen : puisqu'à partir d'un modèle de ZFC quelconque, on peut construire un modèle $M[G]$ dans lequel HC est fausse, c'est que ZFC ne prouve pas HC.

Dans les années qui ont suivi la découverte de Cohen, la méthode du forcing a connu un développement extraordinaire, et c'est aujourd'hui un des outils de base de la théorie des ensembles. La méthode s'est révélée extrêmement flexible, et, au prix de l'introduction d'ensembles de conditions de plus en plus sophistiqués — dans certains cas, les conditions sont elles-mêmes des modèles de ZFC — elle a permis la construction de modèles de ZFC aux propriétés très variées, et, de là, d'innombrables résultats négatifs, dits d'*indépendance relative* par rapport à ZFC, du type : telle ou telle propriété n'est ni prouvable, ni réfutable à partir des axiomes de ZFC. Dans le domaine de l'exponentiation des cardinaux, on a en particulier montré non seulement que ZFC ne prouve pas l'hypothèse généralisée du continu, mais, plus généralement, qu'il est possible de construire des modèles de ZFC où $2^{\aleph_\alpha}$ prend à peu près n'importe quelle valeur compatible avec un petit nombre de contraintes comme celles données par les théorèmes de Silver et de Shelah énoncés plus haut.

4. Au-delà du système ZFC

Pour remarquables qu'ils soient, les résultats d'indépendance relative par rapport à ZFC ne marquent pas la fin de la théorie des ensembles, mais quasiment le début de son développement véritable. L'analyse de la première partie a cherché à souligner le caractère naturel des axiomes de ZFC comme abstraction de propriétés que notre intuition recommande d'attribuer aux ensembles, et donc comme point de départ axiomatique. Pour autant, personne ne saurait prétendre que cette analyse est terminée. Ce que montrent les résultats de Gödel et Cohen sur l'hypothèse du continu, ce n'est en aucun cas que celle-ci est indécidable, voire inconnaissable en quelque sens mystérieux, mais seulement que le système ZFC est incomplet, et qu'il s'agit de poursuivre l'étude de la notion d'ensemble — en fait, plutôt de la notion d'infini — afin d'approfondir notre connaissance et de compléter le système de base. La borne théorique imposée par le premier théorème d'incomplétude de Gödel, qui affirme qu'aucun système effectif ne saurait être complet, n'empêche absolument pas de progresser sur telle ou telle question spécifique comme l'hypothèse du continu. Par contre, on se heurte immédiatement à des questions clairement difficiles : quels nouveaux axiomes considérer, et, surtout, sur quelle intuition ou sur quels théorèmes s'appuyer pour reconnaître qu'un axiome est acceptable, voire vrai ? Le point remarquable est que ce type de question n'est pas sans réponse, et qu'en particulier les progrès réalisés au cours des trente dernières années ont permis des avancées considérables.

Deux directions principales structurent cette période d'après le forcing : d'une part, un programme de fond centré sur les grands cardinaux et les modèles canoniques associés, et, d'autre part, l'étude des petites cardinalités, le dénombrable dans la période 1970-85 avec les ensembles projectifs et les axiomes de détermination, puis la cardinalité $\aleph_1$ depuis les années 1980 avec les axiomes de forcing et le récent programme de Woodin qui laisse entrevoir une solution négative au problème du continu.

4.1. **Grands cardinaux.** A la différence du système de Peano, qui postule l'existence d'une suite indéfinie d'entiers mais pas celle d'un objet infini qui les englobe tous, la théorie des ensembles postule l'existence d'objets infinis. Ce passage d'un infini dit potentiel à un infini actuel est le vrai point de départ de la théorie des ensembles –

en un sens qui peut être rendu précis, la théorie des ensembles sans axiome de l'infini est l'arithmétique – et il est directement responsable du pouvoir de démonstration supérieur de la théorie des ensembles : il existe des énoncés d'arithmétique, comme la convergence des suites de Goodstein, qui sont démontrables en théorie des ensembles, mais pas en arithmétique. Dès lors, il est tentant de reproduire le schéma à un niveau ultérieur et d'introduire, au moins à titre d'hypothèse de travail, des notions d'infini itéré qui dépasseraient l'infini usuel à la façon dont celui-ci dépasse le fini. Cette approche envisagée dès les années 1930 s'est révélée fructueuse et elle a été largement développée depuis les années 1970, avec l'introduction d'une profusion d'objets appelés *grands cardinaux*.

Un exemple est la notion de cardinal *inaccessible*. On part de la remarque que, si μ est un cardinal fini, il en est de même de 2^μ, et que la borne supérieure de toute suite finie de cardinaux finis est finie. En d'autres termes, le cardinal $\aleph_0$ ne peut être atteint à partir des cardinaux plus petits ni par exponentiation, ni par borne supérieure. On appelle *inaccessible* tout cardinal κ autre que $\aleph_0$ et possédant, *mutatis mutandis*, les mêmes propriétés, c'est-à-dire tel que $\mu < \kappa$ entraîne $2^\mu < \kappa$ et que $\mu < \kappa$ entraîne $\sup\{\mu_\alpha ; \alpha < \mu\} < \kappa$ si pour tout α on a $\mu_\alpha < \kappa$. On montre facilement qu'un cardinal inaccessible doit être gigantesque : par exemple, si κ est inaccessible, alors on a $\kappa = \aleph_\kappa$, et même κ est le κ-ème cardinal vérifiant $\mu = \aleph_\mu$.

Existe-t-il des cardinaux inaccessibles ? De la même façon qu'on ne peut démontrer l'existence d'un cardinal infini dans le système ZFC privé de l'axiome de l'infini, on ne peut montrer dans ZFC l'existence d'un cardinal inaccessible. L'argument est simple. Pour α ordinal, soit V_α l'ensemble obtenu à partir de l'ensemble vide en itérant α fois l'opération $\mathfrak{P}$. Alors, si κ est inaccessible, l'*ensemble* V_κ, muni de la restriction de l'appartenance, est un modèle de ZFC, d'où il résulte que, si ZFC prouvait l'existence d'un cardinal inaccessible, alors il prouverait sa propre non contradiction, ce qu'interdit le second théorème d'incomplétude. De plus, et à la différence de HC et de sa négation, non seulement ZFC ne prouve pas l'existence d'un cardinal inaccessible, mais il ne prouve même pas que cette existence est une hypothèse non-contradictoire. L'existence d'un cardinal inaccessible est donc un véritable axiome, au-delà du système ZFC — et donc la question se pose de savoir s'il est opportun ou non de l'adjoindre à ZFC.

Avant de discuter cette question, notons l'existence de nombreuses notions de grand cardinal similaires aux cardinaux inaccessibles : cardinaux mesurables, cardinaux de Woodin, cardinaux supercompacts, *etc.* Cette multiplicité est due au fait que l'infini dépasse le fini de nombreuses manières et qu'il existe donc de nombreuses façons d'itérer le processus. Techniquement, les plus intéressantes s'expriment en termes de *plongements élémentaires* : un plongement élémentaire d'un ensemble X est une injection non surjective de X dans lui-même qui est un homomorphisme vis-à-vis de toute notion pouvant être définie à partir de la relation d'appartenance ; là aussi, on montre que l'existence d'un plongement élémentaire sur X force X à être gigantesque.

Signalons deux points remarquables. D'abord, et bien qu'ils proviennent d'approches très diverses, tous les axiomes de grands cardinaux introduits à ce jour s'organisent en une hiérarchie totalement ordonnée. Ensuite — mais ce n'est que la répétition d'un phénomène déjà signalé pour l'axiome de l'infini — et bien que les axiomes de grands cardinaux mettent en jeu des objets gigantesques, ils interfèrent néanmoins avec les propriétés des objets les plus usuels, par exemple les nombres entiers ou les nombres réels. De fait, un grand nombre de propriétés dont la méthode du forcing permet de montrer qu'elles ne sont ni prouvables, ni réfutables à partir de ZFC, deviennent (suivant les cas) prouvables ou réfutables lorsqu'on ajoute à ZFC un axiome de grand cardinal suffisamment fort. Des exemples apparaîtront au paragraphe suivant avec les grands cardinaux de Woodin et les propriétés des sous-ensembles projectifs de $\mathbb{R}$. Signalons aussi les résultats de Harvey Friedman montrant que diverses propriétés combinatoires explicites ne mettant en jeu que des graphes finis sont équivalentes à l'existence de certains grands cardinaux dans des modèles intérieurs, et, de là, ne peuvent être établies sans supposer cette existence.

Doit-on ajouter les axiomes de grands cardinaux au système ZFC ? D'abord, le fait qu'on ne puisse démontrer ni l'existence, ni même la non-contradiction de l'existence de grands cardinaux n'est pas un motif pour les écarter : la situation est la même qu'avec l'axiome de l'infini, et elle exprime simplement que les axiomes de grands cardinaux sont de véritables nouveaux axiomes. Ensuite, s'il est difficile d'affirmer que l'intuition recommande *a priori* d'adopter les axiomes de grands cardinaux, il existe néanmoins à l'heure actuelle un consensus parmi les spécialistes pour le faire — ou, tout au moins, pour rejeter tout axiome qui contredirait l'existence de grands cardinaux. Au moins trois principes justifient cette position : l'un est que le passage à l'infini est l'opération-clé de la théorie des ensembles et qu'il serait illogique de refuser de l'itérer ; le second est que les théories sans grands cardinaux apparaissent comme des sous-théories des théories avec grands cardinaux, de sorte que ces dernières sont le cadre global le plus adapté pour le calcul ensembliste — à la façon dont les corps algébriquement clos fournissent un cadre adapté pour le calcul algébrique ; surtout, le troisième point est que les axiomes de grands cardinaux mènent à une théorie si riche et satisfaisante qu'elle emporte *a posteriori* l'adhésion des spécialistes — on y reviendra plus loin. Enfin, dernière remarque allant dans le sens d'un usage libéral des axiomes de grands cardinaux, il est souvent suffisant pour les démonstrations de supposer non pas l'existence de tel ou tel grand cardinal dans le modèle de référence, mais simplement celle d'un ordinal se comportant comme le grand cardinal en question dans un modèle intérieur du modèle de référence, ce qui, du point de vue de la force logique, est en général une hypothèse notablement plus faible.

4.2. **Modèles canoniques.** Il existe des modèles de ZFC très divers — certains vérifient HC, d'autres non, *etc.* — et on peut rêver d'en dresser une classification exhaustive analogue à celle des groupes finis ou des surfaces compactes. Ce programme reste hors de portée, mais des étapes importantes ont été réalisées avec la construction des modèles dits canoniques, une des directions principales de la théorie depuis trente ans.

Le premier modèle canonique est le modèle $L(V)$ de Gödel, désormais simplement noté L — toutes les constructions peuvent s'effectuer à un niveau purement syntaxique d'axiomes et de formules, mais il est plus commode de les décrire en partant de $(V, \in)$ plutôt que d'un modèle (M, E) arbitraire. L'étude fine du modèle L, développée par Ronald Jensen depuis les années 1970, mène à un résultat dit de recouvrement : si un sous-modèle M de V ne satisfait pas l'axiome de grand cardinal «L possède un plongement élémentaire», alors tout ensemble d'ordinaux non dénombrable de M est inclus dans un ensemble de L de même cardinal. L'axiome «L possède un plongement élémentaire» est le premier des axiomes dit de très grand cardinal, et la philosophie de ce résultat est que, si un modèle M ne contient pas de très grand cardinal, alors M ressemble à L et en particulier l'arithmétique des cardinaux dans M est proche de celle de L.

A partir de «L possède un plongement élémentaire», il existe une longue hiérarchie d'axiomes de grands cardinaux A_ν de plus en plus forts. Le programme des modèles canoniques vise à définir, pour chaque niveau ν de cette hiérarchie, un modèle canonique M_ν satisfaisant A_ν, aussi explicitement contrôlé que le modèle L, et tel que tout modèle satisfaisant A_ν mais aucun A_μ avec $\mu > \nu$ ressemble à M_ν. A ce jour, ce programme a été mené à bien pour une grande part de la hiérarchie, en particulier jusqu'au niveau des cardinaux de Woodin (cf. *infra*), mais il bute encore sur le niveau dit des cardinaux supercompacts, même si des résultats récents de Woodin laissent espérer des progrès.

4.3. **La détermination projective.** Même si les grands ensembles — ceux dont la cardinalité est un de ces grands cardinaux mentionnés plus haut — jouent un rôle technique important, l'objectif premier de la théorie des ensembles reste d'éclairer des problèmes qui, comme celui du continu, concernent des petits ensembles — ceux dont la cardinalité est $\aleph_0$, $\aleph_1$... Une graduation par la cardinalité apparaît naturellement, et, comme l'étude des cardinalités finies est le domaine de la combinatoire et de l'arithmétique, la première étape véritable de la théorie des ensembles est l'étude du dénombrable, c'est-à-dire de la cardinalité $\aleph_0$. Cette étape a été l'enjeu principal de la théorie entre 1970 et 1985, et elle est achevée, au sens où une solution totalement satisfaisante recueille aujourd'hui le consensus unanime des spécialistes.

Pour expliquer les résultats plus précisément, notons H_κ la famille des ensembles qui sont de cardinal $< \kappa$, et dont les éléments, les éléments des éléments, *etc.* sont tous de cardinal $< \kappa$. Il est facile de se convaincre que le but informel d'étudier les ensembles de cardinalité $< \kappa$ correspond à la tâche formelle de décrire la structure $(H_\kappa, \in)$.

En un sens précis, la structure $(H_{\aleph_0}, \in)$ équivaut à l'arithmétique, c'est-à-dire à la structure $(\mathbb{N}, +, \times)$, et, à ce titre, elle se trouve en deçà de la théorie des ensembles, au moins au sens où, empiriquement, il apparaît peu probable que des méthodes ensemblistes puissent aider à la résolution des problèmes ouverts. La première étape est donc celle du dénombrable, c'est-à-dire de $H_{\aleph_1}$. Or, au même sens que ci-dessus, la structure $(H_{\aleph_1}, \in)$ équivaut à $(\mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{N}, +, \times, \in)$, et il se trouve que les ensembles qu'on peut définir dans cette dernière structure sont, à un codage près, les sous-ensembles dits *projectifs* de $\mathbb{R}$, définis comme ceux qui s'obtiennent à partir des boréliens de $\mathbb{R}^n$ par projections et complémentations itérées — les boréliens étant eux-mêmes les sous-ensembles qui s'obtiennent par unions dénombrables et complémentations à partir des ouverts. Ceci explique l'intérêt spécifique accordé aux ensembles projectifs.

Alors que la plupart des propriétés des ensembles boréliens sont prouvables dans ZFC, de nombreuses questions concernant les ensembles projectifs restent ouvertes, par exemple la question de savoir si toute projection de complémentaire de projection de borélien est mesurable au sens de Lebesgue : dans le modèle L, la réponse est négative, alors que, si l'axiome de grand cardinal «L possède un plongement élémentaire» est satisfait, elle est positive. En bref, ZFC échoue à donner une description satisfaisante des ensembles projectifs, donc de la structure $(H_{\aleph_1}, \in)$, et la première exigence envers une théorie au delà de ZFC serait de fournir une telle description.

C'est dans ce contexte que la propriété de *détermination* a joué un rôle unificateur important. Pour A inclus dans l'intervalle $[0, 1]$, considérons le jeu infini G_A où deux joueurs choisissent alternativement des entiers 0 ou 1, construisant pas à pas le développement binaire d'un nombre réel α ; on déclare le joueur I gagnant si α est dans A, sinon II gagne. Finalement, on dit que l'ensemble A est *déterminé* si l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans le jeu G_A. A partir des axiomes de ZFC, on montre que tout ouvert est déterminé (Gale–Steward, 1953), puis, beaucoup plus difficilement, que tout borélien l'est (Martin, 1975). Par contre, ZFC ne prouve ni ne réfute la détermination des projections de boréliens.

Malgré son expression inhabituelle en termes de jeu, la propriété de détermination est un paradigme commode, car de nombreuses propriétés s'y ramènent. Par exemple, pour chaque sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, il existe un sous-ensemble A' de même complexité dans la hiérarchie projective tel que A est mesurable au sens de Lebesgue si et seulement A' est déterminé.

Considérons alors l'assertion «tout ensemble projectif est déterminé», abrégée en DP (détermination projective). Un faisceau de résultats établis dans les années 1960–80, notamment par Yiannis Moschovakis et Alexander Kechris, montre qu'ajouter DP lève toute ambiguïté sur les propriétés des ensembles projectifs : par exemple, ZFC + DP prouve que les projectifs sont mesurables au sens de Lebesgue, qu'ils ont la propriété de Baire, donne des résultats structurels complets, bref fournit précisément ce qu'on peut appeller une description heuristiquement satisfaisante des ensembles projectifs.

Dès lors, il est naturel d'envisager d'ajouter DP à ZFC comme axiome de base. Or, d'après ce qu'on a dit plus haut, ceci n'est jugé légitime que si DP ne contredit pas l'existence de grands cardinaux. Par conséquent, il est crucial d'établir un lien éventuel entre DP et les axiomes de grands cardinaux, et, de fait, ceci a constitué le principal défi de la théorie autour de 1980. La réponse est venue avec deux résultats qui sont des tours de force techniques :

• L'existence d'une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP (Martin et Steel, 1984) ;

• L'axiome DP entraîne l'existence d'une infinité de cardinaux de Woodin dans un modèle intérieur (Woodin, 1987).

La conjonction de ces deux résultats montre que DP *est* un axiome de grand cardinal. Depuis lors, s'est imposé dans la communauté des théoriciens des ensembles un consensus à peu près unanime pour adopter l'axiome DP comme complément naturel à ZFC. Le profane peut trouver cet énoncé bien technique et peu intuitif, mais la situation n'est guère différente de celle de l'axiome de l'infini. Ce dernier paraît certes intuitif à tout mathématicien, mais il ne possède aucune justification autre que l'intériorisation d'une longue familiarité et d'une efficacité remarquable (des mathématiques sans infini, donc sans nombres réels, seraient bien compliquées...) : il s'agit donc plutôt d'une évidence *a posteriori*, et, de ce point de vue, l'évidence actuelle en faveur de l'axiome DP n'est pas moindre parmi les spécialistes. Dans les deux cas, le principal critère de vérité est l'accumulation d'un corpus de théorèmes fournissant une description heuristiquement satisfaisante de l'univers mathématique — quel que soit ici le sens du mot satisfaisant.

4.4. **Le programme de Woodin.** Les théorèmes de Martin–Steel et Woodin ont clos la description des ensembles projectifs et de la structure $H_{\aleph_1}$, et de là l'étude de l'infini dénombrable. Depuis la fin des années 1980, l'étape naturelle suivante est celle de la structure $H_{\aleph_2}$, c'est-à-dire l'étude de la cardinalité $\aleph_1$. Cette étape est importante, car c'est là que se pose le problème du continu, et une description satisfaisante de $H_{\aleph_2}$ doit en particulier comporter une solution de ce problème.

La question apparaît très difficile. En particulier, on sait depuis longtemps qu'aucun axiome de grand cardinal ne peut résoudre le problème du continu, et une nouvelle approche est donc nécessaire. A ce jour, la piste la plus prometteuse met en jeu les *axiomes de forcing* et le programme de Woodin basé sur la notion d'absoluité générique.

La méthode des extensions génériques est extrêmement puissante, et, pour de nombreuses propriétés F, on peut construire deux ensembles de conditions P, P' tels que, partant d'un modèle M quelconque, la formule F soit vraie dans toute P-extension, et fausse dans toute P'-extension, masquant toute dissymétrie entre F et sa négation. Le point de départ de Woodin est la remarque suivante : quelle que soit la puissance du forcing, il existe un noyau sur lequel il n'a pas de prise, à savoir l'arithmétique ou, ce qui revient au même, la structure $H_{\aleph_0}$. D'un modèle de ZFC à l'autre, les propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times)$ et de $(H_{\aleph_0}, \in)$ peuvent varier, mais, si $M[G]$ est une extension générique de M, alors les propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times)$ et de $(H_{\aleph_0}, \in)$ sont les mêmes dans M et dans $M[G]$: le système ZFC donne lieu, au niveau de l'arithmétique et de $H_{\aleph_0}$, à un phénomène d'absoluité, c'est-à-dire d'invariance, des propriétés par extension générique, phénomène naturellement appelé *absoluité générique*. Ce phénomène est directement lié au fait que ZFC donne une description empiriquement complète de $(\mathbb{N}, +, \times)$ malgré la limitation théorique du théorème d'incomplétude : en pratique, aucune des propriétés usuelles des nombres entiers n'est connue pour être improuvable à partir de ZFC, comme cela serait le cas si le forcing pouvait les altérer.

L'absoluité générique prouvée par ZFC au niveau de $H_{\aleph_0}$ et de l'arithmétique ne s'étend pas au niveau de $H_{\aleph_1}$ et des ensembles projectifs. Le point remarquable est que, par contre, un système essentiellement équivalent à ZFC+DP, dont on a vu qu'il fournit une description empiriquement complète de $H_{\aleph_1}$, prouve l'absoluité générique au niveau de $H_{\aleph_1}$. Ce résultat relativement ancien (Foreman–Magidor–Shelah 1984) explique partiellement les découvertes ultérieures et renforce le caractère naturel de l'axiome DP : celui-ci est ce qui permet de retrouver, au niveau du dénombrable, une complétude empirique identique à celle apportée par ZFC au niveau du fini.

L'approche de Woodin consiste à chercher à retrouver une situation analogue au niveau de $H_{\aleph_2}$, c'est-à-dire à chercher un ou des axiomes fournissant à la fois une théorie empiriquement complète de $H_{\aleph_2}$ et un résultat d'absoluité générique à ce niveau. A ce jour, aucune solution complète n'est encore connue. Les candidats les plus sérieux se trouvent du côté des axiomes dits de forcing, en particulier l'axiome de Martin maximal (MM) et ses variantes. De nombreux résultats partiels sont acquis, en particulier le fait qu'une certaine variante MMW de MM, due à Woodin, garantit l'absoluité générique au niveau de $H_{\aleph_2}$. Ce qui manque par contre est un résultat de compatibilité de l'axiome MMW avec les axiomes de grands cardinaux.

Depuis 2000, Hugh Woodin a proposé un cadre conceptuel fondé sur une nouvelle logique, appelée *Ω-logique*, qui intègre l'absoluité générique : *grosso modo*, une formule est déclarée Ω-vraie si elle est vraie dans toute extension générique de V. Woodin construit alors une notion de Ω-preuve et il montre que toute formule Ω-vraie est Ω-prouvable pour autant qu'il existe un modèle canonique pour tout axiome de grand cardinal — une hypothèse, appelée *Ω-conjecture*, qui apparaît très plausible. Un des apports de cette approche est d'améliorer l'intelligibilité des énoncés. Par exemple, l'axiome MMW, candidat naturel à l'axiomatisation de $H_{\aleph_2}$, est simplement l'affirmation que la structure $H_{\aleph_2}$ est algébriquement close en Ω-logique.

Revenons alors à l'hypothèse du continu. Il est connu que l'axiome MM, tout comme sa variante MMW, entraîne $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Comme il n'existe pour le moment pas de consensus pour adopter l'un ou l'autre de ces axiomes, ce résultat n'est en soi pas renversant. Ce qui l'est davantage est le résultat suivant :

- Si la Ω-conjecture est vraie, alors *tout* axiome garantissant l'absoluité générique au niveau de $H_{\aleph_2}$ entraîne que l'hypothèse du continu est fausse (Woodin, 2000).

Ce résultat est fascinant car, pour la première fois depuis l'invention du forcing, il établit une dissymétrie nette entre HC et sa négation, en l'occurrence en faveur de la négation de HC. Malgré des progrès récents, la Ω-conjecture n'est pas démontrée à ce jour. Par ailleurs, l'approche fondée sur l'absoluité générique n'est pas la seule envisageable pour compléter le système ZFC. Mais, à tout le moins, on peut constater qu'il existe aujourd'hui une théorie (des théorèmes !) allant bien au-delà du système ZFC, et même du système ZFC+DP qui en est le prolongement naturel, et que cette théorie penche vers la fausseté de l'hypothèse du continu. Peut-être approche-t-on ainsi d'une solution d'un des plus anciens et difficiles problèmes des mathématiques contemporaines.

De tout temps, des mathématiciens, et non des moindres, se sont demandé si l'extraordinaire difficulté à résoudre le problème du continu n'était pas simplement le signe qu'il s'agit d'un problème mal posé, et ont soupçonné la théorie des ensembles de n'être qu'une scholastique vide de sens. Ces interrogations ne sont pas irrecevables par principe, mais force est de constater qu'aucun théorème ne vient étayer l'attaque, alors que la théorie des ensembles peut présenter pour sa défense l'extraordinaire enchaînement de dizaines de théorèmes non triviaux — dont ce texte ne donne qu'un aperçu très superficiel.

Il est difficile de croire qu'une telle cathédrale aurait pu apparaître si l'exploration de la notion d'infini n'était que le déroulement d'un formalisme vide.

Bibliographie

P. Dehornoy, Progrès récents sur l'hypothèse du continu, d'après Woodin ; *Séminaire Bourbaki, Astérisque* 294 (2004) 147-172 ; H. Friedman, On the necessary use of abstract set theory, *Advances in Mathematics* 41 (1981) 209-280 ; K. Gödel, What is Cantor's Continuum Problem ?, *American Mathematical Monthly* 54 (1947) 515–545 ; T. Jech, *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (2002) ; A. Kanamori, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1994) ; J.L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris (1998) ; K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North Holland, Amsterdam New York Oxford Tokyo (1980) ; A. Levy, *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1979) ; J. Steel, Mathematics need new axioms, *Bulletin Symbolic Logic* 6 (2000) 422–433 : W.H. Woodin, The Continuum Hypothesis, I & II, *Notices American Mathematical Society* 48 (2001) 567-576 & 8 (2001) 681-690.

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
UMR 6139, Université de Caen, 14032 Caen, France

E-mail address: `dehornoy math.unicaen.fr`
URL: `//www.math.unicaen.fr/~dehornoy`