

CANTOR ET LES INFINIS

PATRICK DEHORNOY

En 1874 paraît au Journal de Crelle une note de quatre pages où Georg Cantor, alors âgé de vingt-neuf ans et jeune professeur à l'université de Halle, établit la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques et la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels. Cet article est révolutionnaire car, pour la première fois, l'infini est considéré non plus comme une limite inatteignable mais comme un possible objet d'investigation. L'héritage de ce travail est extraordinaire : non seulement il marque la naissance de la théorie des ensembles — en fait une théorie de l'infini — mais il contient déjà en germe le problème du continu qui a occupé toute la fin de la vie de Cantor et a été et continue d'être le moteur du développement de cette théorie. Un temps objet d'une fascination déraisonnable reposant sur un malentendu, celle-ci est aujourd'hui largement méconnue, alors même qu'apparaissent les premiers signes d'une possible résolution du problème du continu posé par Cantor.

Ce texte présente le contexte et le contenu de l'article de Cantor, puis évoque deux des principaux développements qui en sont issus, à savoir la construction des ordinaux transfinites, avec l'amusante application aux suites de Goodstein, et le problème du continu, y compris les contresens souvent rencontrés sur la signification des résultats de Gödel et Cohen, ainsi que les résultats récents de Woodin qui laissent entrevoir ce que pourrait être une solution future.

1. Une petite note et deux résultats simples

1.1. **L'auteur.** Georg Cantor naît en 1845 à Saint-Petersbourg, d'une mère russe et d'un père homme d'affaires allemand, d'origine juive mais converti au protestantisme. Il passe ses premières années en Russie. La famille revient en Allemagne quand Georg a onze ans, d'abord à Wiesbaden puis à Francfort. Cantor fréquente le lycée de Darmstadt, où ses dons en mathématiques sont remarqués, puis le Polytechnicum de Zurich en 1862, et, à partir de 1863, l'université de Berlin où il obtient l'équivalent d'un master en 1867.

En 1869, à l'âge de vingt-quatre ans, il soutient une thèse en théorie des nombres, reçoit son habilitation, et obtient un poste à l'université de Halle (Saxe-Anhalt). Là, sous l'influence de son collègue Eduard Heine (1821–1881), il se tourne vers l'analyse, principalement le problème de l'unicité de la représentation d'une fonction par série trigonométrique, qu'il résout positivement en 1870. La question continuera de jouer un grand rôle dans les réflexions de Cantor en arrière-plan de l'élaboration de la théorie des ensembles, notamment avec l'étude des ensembles dits d'unicité.



FIGURE 1. Georg Cantor jeune (à l'époque de l'article de 1874?)

À partir de 1872, Cantor entretient une correspondance avec Richard Dedekind (1831-1916), qui est son aîné de quatorze ans et vient de proposer la définition des nombres réels par coupures. C'est dans ce contexte que Cantor s'intéresse aux questions qu'on appelle maintenant de dénombrabilité, c'est-à-dire à la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble. Le résultat fondamental dont on va parler plus loin, à savoir la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels, est annoncé pour la première fois dans une lettre à Dedekind datée du 7 décembre 1873. Il est publié l'année suivante au Journal de Crelle, sous le titre « Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen »¹. Ce court article contient deux résultats portant sur la possibilité ou non de numéroter les nombres réels.

III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelle's Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 253–263 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1)$$

wo n, a_0, a_1, \dots, a_n ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω , welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν , welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots \quad (2)$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in §1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

FIGURE 2. La première page de l'article de 1874 — ici reproduit dans les œuvres complètes de Cantor

1.2. **Un résultat positif...** Les nombres réels sont les coordonnées des points d'une droite. Ils incluent en particulier les nombres entiers $0, 1, 2, \dots$ et les nombres rationnels, de la forme p/q avec p, q entiers et q non nul. Ils incluent aussi beaucoup de nombres irrationnels. Un nombre réel (ou complexe) α est

¹Sur une propriété de la collection de tous les nombres algébriques

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÈBRIQUES RÉELS.⁽¹⁾

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. Journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 238.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$(1) \quad a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

où n, a_0, a_1, \dots, a_n sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible; ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement à une équation de la forme (1) correspondent au plus autant de nombres algébriques réels racines de cette équation, qu'il y a d'unités dans le degré n .

Les nombres algébriques réels constituent par leur ensemble un système de nombres que nous désignerons par (ω) ; ainsi qu'il résulte de considérations élémentaires, ce système (ω) de nombres est de telle nature qu'il existe une infinité de nombres de (ω) dont la différence avec un nom-

(¹) M. GEORG CANTOR ayant eu la bonté de nous promettre une série d'articles nouveaux concernant ses recherches sur la théorie des ensembles, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant d'abord ici en traduction française les principaux mémoires de M. CANTOR qui se rapportent à ce sujet; ils nous paraissent en effet indispensables à l'intelligence des nouveaux qui vont suivre et que l'auteur publiera de même en français. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur. Le rédacteur.

FIGURE 3. Traduction française de l'article de 1874 publiée dans *Acta mathematica* en 1883, et accessible sur gallica [10]

dit *algébrique* s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution. Tout nombre entier est algébrique, puisque l'entier n est l'(unique) solution de l'équation $x - n = 0$. Tout nombre rationnel est algébrique, puisque le rationnel p/q est l'(unique) solution de l'équation $qx - p = 0$. Un exemple typique de nombre algébrique non rationnel est $\sqrt{2}$, qui est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$. Il existe énormément de nombres algébriques : tout nombre réel pouvant être écrit à partir des nombres entiers à l'aide des opérations $+, -, \times, /, \sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[5]{}, \dots$ est algébrique, et il en existe encore bien d'autres puisque, depuis Abel, on sait qu'il existe des équations algébriques dont les solutions ne peuvent pas être exprimées à l'aide des opérations précédentes.

Pourtant, Cantor démontre dans [2] :

Théorème 1. *On peut numéroter les nombres algébriques.*

Autrement dit : *Il n'existe pas plus de nombres algébriques que d'entiers naturels.*

La démonstration de Cantor n'est pas difficile.

Démonstration. Pour toute équation algébrique E

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad \text{avec } a_0 > 0,$$

appelons *hauteur* de E l'entier

$$a_0 + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n,$$

et disons qu'un nombre algébrique α admet la *hauteur* N si α est racine d'au moins une équation de hauteur N . Noter qu'un nombre algébrique donné admet certainement une infinité de hauteurs.

Par construction, la hauteur d'une équation est au moins 2. Il existe une seule équation de hauteur 2, à savoir

$$x = 0,$$

et, par conséquent, un seul réel admettant la hauteur 2, à savoir 0.

De même, il existe quatre équations de hauteur 3, à savoir

$$2x = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad \text{et} \quad x^2 = 0,$$

et, par conséquent, trois réels admettent la hauteur 3, à savoir $-1, 0, 1$.

Alors, pour toute valeur de l'entier N , il n'existe qu'un nombre fini d'équations de hauteur N , borné supérieurement par $(2N)^N$, et, de là, un nombre fini de réels algébriques admettant la hauteur N , borné supérieurement par $(2N)^N \cdot N$ puisqu'une équation de degré n a au plus n racines.

On peut alors numéroter les nombres algébriques comme suit : on numérote tous les nombres algébriques admettant la hauteur 2, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 3, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 4, etc. Comme tout nombre algébrique admet une hauteur, la liste ainsi constituée — qui est redondante — contient tous les nombres algébriques. \square

1.3. ... et un résultat négatif. Par contre, si on considère la collection de tous les nombres réels, alors la situation est différente, et c'est le second résultat démontré dans [2].

Théorème 2. *On ne peut pas numéroter les nombres réels.*

Démonstration. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de nombres réels. On va exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des nombres α_n , ce qui montre qu'aucune numérotation des nombres réels ne peut être exhaustive. Sans restreindre la généralité, on suppose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

On va s'efforcer d'extraire de la suite des α_n une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$(1) \quad \alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}.$$

On part de $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, et donc de $\alpha_{n_0} = 0$ et $\alpha_{n_1} = 1$. On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. Alors de deux choses l'une.

Ou bien aucun entier n ne vérifie

$$(2) \quad n > n_i \quad \text{et} \quad \alpha_n \text{ est entre } \alpha_{n_{i-1}} \text{ et } \alpha_{n_i} \text{ (strictement),}$$

auquel cas on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et alors α est distinct de α_n pour tout n .

Ou bien il existe n vérifiant (2), et alors on définit n_{i+1} comme étant le plus petit tel entier. Notons que, dans ce cas, pour chaque entier n vérifiant $n_i < n < n_{i+1}$, le réel α_n n'est pas entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$ (sinon ce serait cet entier n qui aurait été choisi pour n_{i+1}).

Si la construction n'a pas avorté, on a obtenu des nombres réels α_{n_i} vérifiant (1). La complétude de \mathbb{R} implique qu'il existe au moins un nombre réel α coïncé entre les deux demi-suites, c'est-à-dire vérifiant

$$(3) \quad \alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}.$$

Alors α ne peut être égal à aucun des réels α_n . Par (3), c'est clair lorsque n est de la forme n_i . Sinon, il existe i tel que n est entre n_i et n_{i+1} . Mais alors, par construction, α est entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$, alors qu'on a noté plus haut que α_n n'y est pas. On a donc à nouveau $\alpha \neq \alpha_n$. \square

Cantor note que le rapprochement des théorèmes 1 et 2 permet de redémontrer l'existence de réels non algébriques, établie pour la première fois par Liouville en 1851.

1.4. En quoi ces résultats sont remarquables. L'infini apparaît dans les textes mathématiques dès l'Antiquité, mais il y apparaît en creux, comme une propriété négative (est infini ce qui n'est pas fini) et une limite inatteignable, mais non comme un objet d'étude en soi.

Vers le milieu du dix-neuvième siècle, une maturation s'est opérée et on commence à réfléchir sur l'infini en des termes plus mathématiques. Par exemple, dans un texte posthume intitulé « Paradoxien des Unendlichen »² paru en 1851, Bernhard Bolzano (1781–1848) observe qu'il y a autant d'éléments dans l'intervalle réel $[0, 5]$ que dans l'intervalle $[0, 12]$, et donc que, dans une collection infinie, une partie propre peut être aussi grosse que le tout — mais c'est ce qu'avait déjà fait Thâbit bin Qurrâ al-Harrânî (836–901) mille ans plus tôt. Pour autant, l'infini reste *terra incognita* et objet de nul résultat ou démonstration, ni même définition puisque la propriété rappelée ci-dessus ne sera explicitement proposée comme définition de l'infini que par Richard Dedekind vers 1888.

Ce qui est profondément novateur dans l'article de Cantor est le fait de *démontrer* des propriétés de l'infini. Ce que fait Cantor, c'est de démontrer le premier théorème sur l'infini, en l'occurrence qu'il existe non pas un infini, mais au moins deux : l'infini des nombres algébriques est le même que celui des nombres entiers, mais ce n'est pas le même que celui des nombres réels. Indépendamment de l'énoncé du résultat, qui n'est peut-être pas si important en soi, c'est la possibilité de son existence qui est novatrice : avec Cantor, l'infini devient objet d'étude. La lettre à Dedekind de décembre 1873 est donc le point de naissance d'une théorie mathématique complètement nouvelle, la théorie de l'infini — qui sera plutôt appelée la théorie des ensembles. Il est rare que le point de départ de ce qui deviendra un courant de pensée aussi important puisse être daté avec autant de précision.

Un point est remarquable. Cantor a intitulé son article « Sur une propriété de la collection des nombres algébriques », ce qui correspond au théorème 1, mais non au théorème 2, qui pourtant nous apparaît aujourd'hui comme le résultat le plus novateur. Comme dans [4], on peut se demander si l'accent mis sur le résultat positif (on peut énumérer...) plutôt que sur le résultat négatif (on ne peut pas énumérer...) n'est pas une précaution de Cantor pour éviter le rejet de son article par Leopold Kronecker (1823–1891), alors éditeur du Journal de Crelle et grand contempteur de l'infini et de toutes les spéculations qu'on appellerait aujourd'hui non effectives.

1.5. L'argument diagonal. En 1891, dix-huit ans après l'article de 1874, Cantor publie une nouvelle démonstration du théorème 2, encore plus simple et frappante, et passée à la postérité comme la démonstration de référence. L'argument dit *diagonal* qui est à la base de cette démonstration a des éléments communs avec une construction développée dès 1875 par Paul du Bois-Reymond (1831–1889), mais la combinaison d'une autoréférence et d'une négation, qui est le point décisif, y apparaît semble-t-il pour la première fois. On sait que cet argument a eu une descendance extraordinaire, puisqu'il est l'ingrédient technique de base dans plusieurs des grands résultats de la logique du vingtième siècle, notamment le paradoxe de Russell, les théorèmes d'incomplétude de Gödel, la construction d'ensembles indécidables par Turing, et les théorèmes de hiérarchie en théorie de la complexité.

Démonstration du théorème 2 par l'argument diagonal. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de nombres réels. On va à nouveau exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des α_n . Cette fois, on n'utilise pas l'ordre des nombres réels, mais l'existence d'un développement binaire pour chaque nombre réel. Pour chaque entier n , il existe une suite infinie $(a_{n,1}, a_{n,2}, \dots)$ de 0 et de 1 telle qu'on ait

$$\alpha_n - E(\alpha_n) = \overline{0, a_{n,1}a_{n,2}\dots},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Posons alors $0^* = 1$, $1^* = 0$, et soit α le réel dont le développement binaire est

$$\overline{0, a_{1,1}^* a_{2,2}^* \dots}.$$

Alors, quel que soit n , le réel α est différent de α_n , puisque le n -ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$, alors que celui de α est $a_{n,n}^*$, qui est différent de $a_{n,n}$ par construction³. \square

²Paradoxes de l'infini

³Tel quel, l'argument n'est pas rigoureux, car il suppose l'unicité du développement binaire, laquelle n'est vraie que pour les réels qui ne sont pas des rationnels dyadiques (rationnels pouvant s'écrire avec un dénominateur qui est une puissance de 2) : ces derniers admettent deux développements, l'un terminé par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 1. Pour rendre l'argument

2. L'héritage (1) : les ordinaux

La descendance de l'article de Cantor est extraordinaire puisque c'est toute la théorie des ensembles et, de là, une part non négligeable des mathématiques du vingtième siècle qui peuvent s'y rattacher. Cette descendance peut être décrite en partant des travaux ultérieurs de Cantor. Toujours à Halle, où il devient professeur en 1879 à trente-quatre ans, Cantor s'intéresse de plus en plus à ce qui deviendra la théorie des ensembles et, entre 1879 et 1884, il publie dans les *Mathematische Annalen* une série de six articles qui forment le socle de cette théorie.



FIGURE 4. Georg Cantor, probablement dans les années 1880

Dans cet héritage, on distinguera ici deux thèmes principaux, le premier étant la possibilité de compter au-delà du fini, qui mène à la notion d'ordinal transfini.

2.1. Une théorie des nombres transfinis. Ce que montre Cantor, c'est que, une fois franchie la barrière conceptuelle qui rendait l'infini inaccessible, alors rien ne s'oppose à développer une arithmétique des nombres infinis — ou, plutôt, transfinis, c'est-à-dire au-delà du fini — qui ressemble beaucoup à l'arithmétique des nombres entiers et peut être utilisée en particulier pour des démonstrations par récurrence.

L'idée est de prolonger la suite des nombres entiers, c'est-à-dire de *compter* au-delà de $0, 1, 2, \dots$. Pour ce faire, le principe placé par Cantor à la base de sa construction est une propriété bien connue pour les nombres entiers et au cœur des démonstrations par récurrence, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément. Ce qu'observe Cantor, c'est que, si on garde ce principe, alors il n'existe qu'une façon de prolonger la suite des entiers. Par exemple, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que tous les entiers, et Cantor l'appelle ω . Ensuite, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que ω , et Cantor l'appelle $\omega + 1$. Evidemment, viennent ensuite $\omega + 2, \omega + 3, \dots$, puis un plus petit nombre transfini qui est plus grand que tous les $\omega + n$ et qu'on appelle $\omega + \omega$, ou encore $\omega \cdot 2$. On continue avec $\omega \cdot 2 + 1$, puis, un peu plus tard, $\omega \cdot 3$, et ainsi de suite. Il existe un plus petit nombre transfini qui vient après tous les $\omega \cdot n$, et on le note $\omega \cdot \omega$, ou encore ω^2 . Il n'y a aucune raison de s'arrêter en si bon chemin, et on trouve encore plus tard ω^3, ω^4 , puis ω^ω , puis ω^{ω^2} , et même un jour ω^{ω^ω} , ... et encore bien d'autres nombres transfinis au-delà.

Ce que démontre Cantor — sans toutefois convaincre le très réticent Kronecker — c'est que la description ci-dessus n'est pas juste une extrapolation gratuite et hasardeuse, mais un système cohérent pouvant être utilisé dans des démonstrations. Par exemple, lui-même l'utilise en 1883 dans l'étude des ensembles d'unicité pour démontrer au moyen d'une récurrence sur les nombres transfinis, et en même temps que le mathématicien suédois Ivar Bendixson (1861–1935), un résultat demeuré fameux sur la structure des sous-ensembles fermés de la droite réelle, à savoir que tout tel ensemble peut s'écrire comme réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble dont tous les points sont points d'accumulation.

rigoureux, il suffit de considérer le réel α' dont le développement binaire est $\overline{0, 1a_{1,2}^* 0a_{2,4}^* 1a_{3,6}^* 0a_{4,8}^* \dots}$; ce réel n'est certainement pas dyadique, et il diffère de α_n pour tout n . En effet, si α_n est dyadique, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque α' n'est pas dyadique, et, sinon, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque le $2n$ -ième chiffre du développement (unique) de α' n'est pas celui du développement (unique) de α_n .

2.2. Une application amusante. Les nombres transfinis — aujourd'hui appelés *ordinaux* — sont un moyen puissant de démontrer des résultats mathématiques. Ce qui est intéressant, et peut paraître paradoxal, c'est que l'utilisation des ordinaux infinis permet parfois de démontrer des propriétés d'objets finis qui resteraient sinon inaccessibles. Un exemple spectaculaire est fourni par la convergence des suites de Goodstein en arithmétique. Il s'agit de suites d'entiers définies par une récurrence simple à partir de la notion de développement en base p itérée. Développer un entier n en base p consiste à décomposer n sous forme d'une somme décroissante

$$n = p^{n_1} \cdot c_1 + \dots + p^{n_k} \cdot c_k$$

où les chiffres c_i sont compris entre 1 et $p - 1$, et où les exposants n_i sont des entiers, nécessairement strictement inférieurs à n . On peut alors exprimer les exposants n_i eux-mêmes en base p , et itérer le processus. On appellera développement *itéré* de n en base p l'expression ainsi obtenue. Par exemple, le développement de 26 en base 2 est $2^4 + 2^3 + 2^1$: le développement de 4 est 2^2 , celui de 3 est $2^1 + 1$, et, finalement, le développement itéré de 26 en base 2 est $2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

Définition 1. (i) Pour $q \geq p \geq 2$, on définit $T_{p,q} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme suit : $T_{p,q}(n)$ est l'entier obtenu en remplaçant partout p par q dans le développement itéré de n en base p , et en évaluant le résultat.

(ii) Pour chaque entier d , on définit la *suite de Goodstein de base d* comme la suite d'entiers g_2, g_3, \dots définie par $g_2 = d$ puis, inductivement,

$$g_{p+1} = T_{p,p+1}(g_p) - 1$$

si g_p est non nul, et $g_{p+1} = 0$ si g_p est nul.

Par exemple, partant de $g_2 = 26$, on trouve

$$T_{2,3}(26) = T_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1} + 2) = 3^{3^3} + 3^{3^1} + 3 = 3^{27} + 3^3 + 3 = 7625597485071.$$

On recommence ensuite de même en remplaçant 3 par 4, et ainsi de suite. Il semble clair que la suite ainsi obtenue tend vers l'infini extrêmement vite. Et, pourtant, Reuben Goodstein (1912-1985) a démontré en 1942 le résultat suivant :

Théorème 3. *Pour tout entier d , la suite de de Goodstein de base d converge vers 0 : il existe un entier p vérifiant $g_p = 0$.*

Démonstration. L'argument est extrêmement simple à partir du moment où on peut utiliser l'arithmétique ordinaire. Pour cela, nous introduisons, pour chaque entier p , une fonction $T_{p,\omega}$ analogue à $T_{p,q}$, mais qui va de \mathbb{N} dans les ordinaux : $T_{p,\omega}(n)$ est l'ordinal obtenu en remplaçant p par ω dans le développement itéré de n en base p . Ainsi, par exemple, on a

$$T_{2,\omega}(26) = T_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1} + 2) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega.$$

Les propriétés de l'arithmétique des ordinaux entraînent facilement que chacune des fonctions $T_{p,\omega}$ est une fonction strictement croissante. Alors, pour $p \geq 2$, on pose $\tilde{g}_p = T_{p,\omega}(g_p)$. Pour chaque entier d , on a ainsi une suite d'ordinaux $\tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \dots$. Or, par construction, on a, pour tout p tel que g_p soit non nul,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{p+1} &= T_{p+1,\omega}(g_{p+1}) = T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p) - 1) \\ &< T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p)) = T_{p,\omega}(g_p) = \tilde{g}_p. \end{aligned}$$

En effet, par construction, quels que soient p, q, r vérifiant $2 \leq p \leq q \leq r \leq \omega$, et quel que soit n , on a $T_{q,r}(T_{p,q}(n)) = T_{p,r}(n)$, et, en particulier, $T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(n)) = T_{p,\omega}(n)$. La propriété fondamentale de la suite des ordinaux, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément, entraîne que toute suite strictement décroissante d'ordinaux doit être finie. Donc, nécessairement, il existe un entier p tel que \tilde{g}_p est nul, et donc g_p est nul également (figure 5). \square

Le point essentiel dans la démonstration précédente est l'existence de l'ordinal ω , c'est-à-dire l'existence d'un nombre transfini qui domine tous les entiers à la façon dont ω le fait, c'est-à-dire qui soit tel que la distance de 3 à ω soit la même que celle de 2 à ω .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{g}_2 & \xlongequal{\quad} & \tilde{g}_2 & \xrightarrow{\quad > \quad} & \tilde{g}_3 & \xlongequal{\quad} & \tilde{g}_3 & \xrightarrow{\quad > \quad} & \tilde{g}_4 & \xlongequal{\quad} & \dots \\
 \uparrow T_{2,\omega} & & \uparrow T_{3,\omega} & & \uparrow T_{3,\omega} & & \uparrow T_{4,\omega} & & \uparrow T_{4,\omega} & & \\
 g_2 & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad -1 \quad} & g_3 & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad -1 \quad} & g_4 & \xrightarrow{\quad} & \dots \\
 & T_{2,3} & & & T_{3,4} & & & & & &
 \end{array}$$

FIGURE 5. Démonstration du théorème de Goodstein : en bas, les entiers, en haut, leurs images chez les ordinaux infinis, qui gomment les changements de base ; ne restent alors que les -1 qui forcent la décroissance aussi longtemps que 0 n'est pas atteint

Ce qui est remarquable est que le théorème 3, qui est un pur résultat d'arithmétique, au sens où son énoncé ne met en jeu que les entiers et leurs opérations élémentaires, et qu'on a démontré si simplement en utilisant les ordinaux infinis, ne peut *pas* être démontré sans faire appel à un tel outil. Précisément, s'appuyant sur une méthode développée par Paris et Harrington en 1978, Kirby et Paris ont démontré en 1981 [14] que le théorème de Goodstein ne peut pas être démontré en utilisant seulement les axiomes du système de Peano, c'est-à-dire en restant dans le cadre de l'arithmétique usuelle. En un sens, ce résultat légitime la suspicion de Kronecker envers les méthodes de Cantor⁴ ; en un autre sens, il illustre la portée visionnaire de ces dernières.

2.3. Les ordinaux aujourd'hui. Plus d'un siècle plus tard, les tensions sont apaisées, les questions de fondement ont été éclaircies, et les ordinaux et la récurrence transfinie font partie de la palette des mathématiciens. Pour autant, à l'exception de la logique mathématique et de certaines parties de l'informatique théorique (terminaison des systèmes de réécriture) qui en font grand usage, force est de constater que ces outils, pourtant aussi élégants que puissants, restent assez peu utilisés dans le cœur des mathématiques — à quelques notables exceptions près comme le théorème de Martin sur la détermination des boréliens. Ceci n'est pas très étonnant dans la mesure où, finalement, les mathématiques ne font qu'un usage assez limité de l'infini actuel, c'est-à-dire d'un infini qui ne soit pas simplement la continuation indéfinie de la suite des entiers.

3. L'héritage (2) : le problème du continu

L'autre héritage direct de l'article de 1874 est la théorie des cardinaux et son problème central, le problème du continu, qui est la question de déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres réels. Cantor a cherché pendant toute la suite de sa vie la solution au problème du continu. Resté à Halle — l'opposition de Kronecker l'empêcha de trouver un poste à Berlin — il continua à y développer sa théorie des ensembles, avec des résultats notables comme l'argument diagonal de 1891 ou le théorème de comparabilité des cardinalités de 1897, mais il ne résolut jamais le problème du continu. La fin de sa vie est assez triste. Bien que la portée scientifique de son œuvre ait été largement reconnue par ses pairs, sa vie à partir de 1884, et jusqu'à sa mort en 1918, a été assombrie par des polémiques scientifiques et surtout des épisodes dépressifs de plus en plus sévères qui ont entraîné de internements récurrents dans des institutions de soin.

De son côté, le problème du continu est resté au cœur de la théorie des ensembles tout au long du vingtième siècle et aujourd'hui plus que jamais, à un moment où l'espoir d'une solution commence à se dessiner.

3.1. Une infinité d'infinis. Le théorème 2 a montré qu'il existe au moins deux infinis qu'on ne peut pas mettre en correspondance bijective, à savoir celui de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et celui de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels. Intuitivement donc, ces infinis n'ont pas la même taille, et le théorème 2 ouvre une nouvelle problématique qui est celle de comparer la taille des infinis.

⁴Kronecker n'aurait certainement pas été rassuré d'apprendre que le plus petit entier p pour lequel le p -ième terme de la suite de Goodstein de base 4 vaut zéro est $3 \cdot 2^{402653211} - 2$



FIGURE 6. Georg Cantor, probablement aux alentours de 1900

Rapidement, dès 1878, Cantor a proposé de formaliser la comparaison des tailles dans les termes que nous utilisons toujours, à savoir l'existence de bijections et d'injections : on déclare qu'un ensemble A , fini ou infini, a la même taille (ou cardinalité) qu'un ensemble B s'il existe une bijection de A sur B ; de même, on déclare que A est de taille (ou de cardinalité) au plus celle de B s'il existe une injection de A dans B . Noter que, dans le cas d'ensembles finis, ces définitions correspondent bien à la comparaison usuelle des nombres d'éléments. En 1897, Cantor et, au même moment, Felix Bernstein (1878–1956) et Ernst Schröder (1841–1902) montreront que cette comparaison des cardinalités est un ordre total : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A , alors il existe une bijection de A sur B .

On notera que la théorie des cardinalités infinies se sépare rapidement de celle des ordinaux transfinitis : alors que, pour les ensembles finis, compter et ordonner sont des tâches équivalentes, il n'en est pas de même pour les ensembles infinis. Précisément, il n'existe qu'un seul type d'ordre total sur un ensemble fini de cardinalité donnée, alors qu'il existe de multiples ordres totaux deux à deux non isomorphes sur un ensemble infini. Par exemple, du point de vue de la taille, les ensembles \mathbb{N} et \mathbb{Z} sont équivalents, alors que, munis de leurs ordres usuels, ils ne le sont pas.

Dans ce contexte, le théorème 2 affirme qu'il existe au moins deux cardinalités infinies distinctes. Cantor lui-même montrera un résultat beaucoup plus fort grâce à une forme de l'argument diagonal.

Théorème 4 (Cantor). *Il existe une infinité d'infinis deux à deux distincts : les cardinalités de \mathbb{N} , $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, ... sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. On commence par démontrer que, quel que soit l'ensemble E , il n'existe pas de surjection, et donc *a fortiori* pas de bijection, de E sur l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$. En effet, soit f une application quelconque de E dans $\mathfrak{P}(E)$. On va montrer que f n'est pas surjective en exhibant une partie de E qui n'appartient pas à l'image de f . À cet effet, posons

$$(4) \quad A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Soit a un élément quelconque de E . De deux choses l'une. Ou bien a est dans A , ce qui signifie que a n'appartient pas à $f(a)$. Comme a est dans A , c'est que $f(a)$ n'est pas égal à A . Ou bien a est dans le complémentaire de A , ce qui signifie que a appartient à $f(a)$. Comme a n'est pas dans A , c'est à nouveau que $f(a)$ n'est pas égal à A . Donc A ne peut appartenir à l'image de l'application f , et celle-ci ne peut être surjective.

Ceci démontré, posons $E_0 = \mathbb{N}$, $E_1 = \mathfrak{P}(E_0)$, $E_2 = \mathfrak{P}(E_1)$, etc. D'après ce qui précède, quel que soit i , il ne peut exister de bijection de E_i sur E_{i+1} . Par ailleurs, pour tout ensemble non vide E , l'application qui envoie X sur x si X est le singleton $\{x\}$, et sur un élément fixé x_0 sinon, est une surjection de $\mathfrak{P}(E)$ sur E . Par conséquent, pour tous i, j vérifiant $j \geq i + 2$, il existe une surjection de E_j sur E_{i+1} et, de là, s'il existait une bijection de E_i sur E_j , on en déduirait par composition une surjection de E_i sur E_{i+1} , contrairement à ce qu'on a vu plus haut. \square

On reconnaît dans la démonstration du théorème 4 les deux ingrédients de l'argument diagonal, à savoir la combinaison d'une autoréférence — utilisation simultanée de x et $f(x)$ ici, comme celle des chiffres diagonaux $a_{i,i}$ dans la section 1 — et d'une négation — $x \notin f(x)$ ici, utilisation de $a_{i,i}^*$ dans la section 1.

3.2. L'hypothèse du continu. Dès lors qu'il existe une infinité de cardinalités infinies différentes, une question évidente est de déterminer la position des cardinalités des ensembles les plus usuels, \mathbb{N} et \mathbb{R} , dans cette famille. Pour ce qui est de la cardinalité \aleph_1 , on voit facilement que c'est la plus petite des cardinalités infinies : \mathbb{N} s'injecte dans tout ensemble infini⁵. D'après le théorème 2, la cardinalité de \mathbb{R} est strictement plus grande que celle de \mathbb{N} . Ce qu'on appelle le *problème du continu*⁶, c'est précisément de déterminer quel infini est la cardinalité de \mathbb{R} .

Dès 1877 — avant même d'avoir établi l'existence d'une infinité d'infinis et la comparabilité de ceux-ci — Cantor a prédit une solution au problème du continu, l'*hypothèse du continu* :

Toute partie infinie de \mathbb{R} qui n'est pas en bijection avec \mathbb{N} est en bijection avec \mathbb{R} .

L'hypothèse du continu signifie qu'il n'existe aucun ensemble de taille strictement intermédiaire entre celles de \mathbb{N} et de \mathbb{R} , c'est-à-dire, en termes de cardinalités, que la cardinalité de \mathbb{R} (le continu) est un successeur immédiat pour celle de \mathbb{N} (le dénombrable).

Cantor n'a jamais réussi à démontrer (ou à réfuter) l'hypothèse du continu. Le seul résultat notable qu'il démontra sur le problème du continu est le théorème dit de Cantor–Bendixson sur la structure des fermés mentionné plus haut. Celui-ci entraîne facilement que tout sous-ensemble fermé infini de \mathbb{R} qui n'est pas en bijection avec \mathbb{N} est en bijection avec \mathbb{R} entier : ainsi, on peut dire que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu. Hélas, Cantor ne put jamais obtenir de résultat analogue pour des sous-ensembles plus compliqués de \mathbb{R} — et les développements de la théorie des ensembles au vingtième siècle montrent qu'on était très loin à l'époque de disposer des moyens techniques de le faire.

Par contre, sans résoudre en rien la question, les travaux ultérieurs de Cantor permettent de donner du problème du continu la version symbolique concise sous laquelle il est souvent énoncé aujourd'hui. Le point de départ est un nouveau résultat fondamental de Cantor qui précise considérablement le théorème 4 et le théorème de Cantor–Bernstein–Schröder.

Théorème 5 (Cantor). *Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \dots$$

telle que tout⁷ ensemble infini admet pour cardinalité un (et un seul) des alephs⁸.

Ainsi, non seulement il existe une infinité d'infinis, mais on a une description complète de la structure de cette famille des infinis, à savoir une suite bien ordonnée indexée par les ordinaux. Le théorème 5 montre en particulier que, pour chaque cardinalité κ , il existe une plus petite cardinalité strictement plus grande que κ , ce qui n'a rien d'évident : il aurait très bien pu se faire *a priori* que l'ordre des cardinalités inclue des intervalles denses, comme l'ordre de \mathbb{Q} .

Dès lors, \aleph_0 est la cardinalité de \mathbb{N} , et le problème du continu devient celui de déterminer quel aleph est la cardinalité de \mathbb{R} . L'hypothèse du continu prend alors la forme simple $\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$, puisque \aleph_1 est, par définition, le successeur immédiat de \aleph_0 dans la suite des alephs.

Par ailleurs, il est facile de définir une bijection entre \mathbb{R} et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc entre \mathbb{R} et l'ensemble des applications de \mathbb{N} dans $\{0, 1\}$. Puisque la cardinalité de \mathbb{N} est \aleph_0 , il est naturel de noter 2^{\aleph_0} celle de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, qui est donc aussi celle de \mathbb{R} . Avec ce formalisme, l'hypothèse du continu correspond à l'égalité

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

3.3. Le développement d'une discipline nouvelle. En 1900, David Hilbert (1862–1943) expose au Congrès International des Mathématiciens à Paris sa fameuse liste de vingt-trois problèmes pour les mathématiques du vingtième siècle, et place au premier rang la question de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. C'est le signe que les réticences sur l'usage de l'infini autrement que

⁵En termes modernes, il faut au moins une forme faible de l'axiome du choix pour pouvoir affirmer ceci ; ces questions somme toute mineures n'interviendront que plus tard, et n'affectent pas vraiment la théorie cantorienne des cardinaux qui est, principalement, une théorie des ensembles bien ordonnables, c'est-à-dire une théorie où l'axiome du choix est valide

⁶À l'époque de Cantor, l'ensemble des nombres réels est appelée *le continu*

⁷Ici encore, il convient de préciser «tout ensemble bien ordonnable» pour tenir compte des problèmes de choix

⁸ \aleph est la première lettre, aleph, de l'alphabet hébraïque

comme limite inatteignable ont été dépassées et que le caractère fondamental de l'œuvre de Cantor a été reconnu ; Hilbert décrit l'arithmétique transfinie de Cantor comme « le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure ».

Les progrès directs sur le problème du continu ont été lents, car ils n'ont pu se produire qu'après le développement d'un substrat considérable. Dans la lignée du théorème de Cantor–Bendixson montrant que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu, un résultat précoce est le théorème démontré en 1916, à l'âge de vingt ans, par Pavel Alexandroff (1896–1982) : les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu⁹. On sait maintenant que ce résultat est l'optimum de ce qui pouvait être établi à l'époque, et cette direction de recherche n'a pu être poursuivie qu'à partir des années 1970 avec le développement de ce qu'on appelle la théorie descriptive des ensembles moderne, à savoir l'étude fine des sous-ensembles de \mathbb{R} .

La grande difficulté du problème du continu et, plus généralement, de toutes les questions mettant en jeu l'infini, et ce qui rendait pratiquement impossible une solution à l'époque de Cantor, était l'absence d'un cadre conceptuel à la fois précis et objet d'un consensus général pour élaborer une théorie et démontrer des résultats. Cantor a bien proposé une définition devenue classique de la notion d'ensemble — « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M » — mais cela ne saurait suffire à préciser la règle du jeu, c'est-à-dire à déterminer d'où partir pour *démontrer* des propriétés des ensembles. Cantor lui-même a reconnu, en même temps que d'autres comme Cesare Burali-Forti (1861–1931) ou Bertrand Russell (1872–1970), les difficultés où mène l'imprécision de la notion d'objet défini, et ce n'est qu'à partir du début du vingtième siècle que ces points ont commencé à être éclaircis : ce qui importe au mathématicien n'est point de définir ce qu'*est* un ensemble, mais simplement d'obtenir un consensus sur la façon dont *fonctionnent* les ensembles, c'est-à-dire sur le point de départ à partir duquel démontrer des théorèmes. En 1908, Ernst Zermelo (1871–1953) a proposé un système axiomatique pour les ensembles, ultérieurement amendé en 1922 par Adolf Fraenkel (1891–1965), et ce système, connu sous le nom de *système de Zermelo–Fraenkel* ou système ZF s'est assez rapidement imposé comme un point de départ standard pour la théorie des ensembles, à la façon dont le système d'Euclide est un point de départ pour la géométrie du plan ou le système de Peano en est un pour l'arithmétique.

3.4. Deux résultats majeurs... À partir du moment où un consensus était établi pour tenir le système ZF comme point de départ d'une théorie des ensembles, la première étape en direction d'une solution du problème du continu est de déterminer si l'hypothèse du continu est ou non une conséquence des axiomes de ce système. Ce n'est pas le cas : Kurt Gödel (1906–1978) d'abord, puis, vingt-cinq ans plus tard, Paul Cohen (1934–2007), ont montré deux résultats négatifs :

Théorème 6 (Gödel, 1938). *Sauf si ceux-ci sont contradictoires¹⁰, la négation de l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système ZF.*

Théorème 7 (Cohen, 1963). *Sauf si ceux-ci sont contradictoires, l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système ZF.*

Les théorèmes de Gödel et de Cohen sont à juste titre considérés comme des étapes majeures. Leur démonstration a requis la mise en œuvre de moyens complètement nouveaux, méthode des modèles intérieurs dans le cas de Gödel, méthode du forcing dans celui de Cohen. Indépendamment des difficultés purement techniques (qui restent non négligeables, même avec le recul de plusieurs décennies), ces résultats ont nécessité un changement de point de vue complet sur la théorie des ensembles, analogue en bien des points à la révolution copernicienne ou à la découverte des géométries non euclidiennes puisqu'il s'agissait de passer de la vision d'un monde des ensembles unique à celle d'une multiplicité de mondes possibles.

⁹Mais Alexandroff, déçu de n'avoir pas résolu le problème du continu, devint producteur de théâtre et ne revint aux mathématiques que des années plus tard

¹⁰La précaution oratoire est nécessaire, car le second théorème d'incomplétude de Gödel empêche qu'on puisse établir le caractère non-contradictoire du système ZF ; il est donc impossible d'écarter *a priori* l'hypothèse que ce système soit contradictoire



FIGURE 7. Kurt Gödel (à gauche) et Paul Cohen (à droite)

3.5. **... et deux malentendus.** La destinée de la théorie des ensembles n'a, dans la suite du vingtième siècle, guère été plus heureuse que la destinée personnelle de son créateur, Georg Cantor. Deux malentendus sont à l'origine de cette situation.

Le premier malentendu tient au succès-même de la théorie des ensembles. Ce que Zermelo a saisi probablement le premier¹¹, c'est la possibilité d'utiliser les ensembles comme base unique de la totalité de l'édifice mathématique. Précisément, on peut *représenter* comme ensembles les fonctions (Felix Hausdorff, 1918), puis les entiers (John von Neumann, 1923), et, de là, la quasi-totalité des objets mathématiques. Certes remarquable, ce résultat — mis en œuvre de façon systématique dans le traité de Bourbaki quelques années plus tard — a été pris pour bien plus que ce qu'il est, à savoir un résultat de codage (ou de coordinisation), analogue par exemple à la possibilité de coder les points d'un plan par un couple de nombres réels ou par un nombre complexe. Des épigones approximatifs ont vu un résultat ontologique là où il n'est question que de codage, et posé un dogme « tout est ensemble » faisant jouer à la théorie des ensembles un rôle de théorie du grand tout qu'elle ne revendique nullement : il est difficile à un mathématicien laïc de croire que l'entier 2 *est* l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, puisqu'aucune intuition ne vient étayer une telle identité, et qu'aucune démonstration ne saurait en être donnée. Il était dès lors inévitable que l'engouement déraisonnable suscité par cette approche soit déçu et que les applications somme toute mineures de la théorie au reste des mathématiques entraînent un rejet à la mesure des espoirs initiaux. Les dérives pédagogiques des années 1960, directement issues d'une confusion entre « tout est représentable par des ensembles » et « tout est ensemble », n'ont évidemment pas redoré le blason d'une théorie méconnue et souvent imaginée comme la manipulation de diagrammes de Venn aussi abstraits que vides de sens mathématique : la théorie des ensembles est la théorie de l'infini, et elle n'a que très peu à voir avec l'utilisation — au demeurant quotidienne et bien commode — du vocabulaire ensembliste élémentaire par tous les mathématiciens contemporains.

Le second malentendu tient à la signification des théorèmes de Gödel et Cohen. Le public cultivé, et bien des mathématiciens, en ont retenu que le problème du continu est un problème qui ne peut pas être résolu et restera ouvert pour l'éternité. Certains imaginent un mystérieux statut qui ne serait ni vrai, ni faux, ou alors serait intrinsèquement inconnaissable, ou encore dépourvu de tout sens véritable. Ce que disent les résultats de Gödel et Cohen est tout autre, et bien plus simple : ils disent, ou plutôt illustrent puisqu'on le savait déjà depuis les théorèmes d'incomplétude de Gödel, que le système ZF de Zermelo-Fraenkel est incomplet, lacunaire, qu'il n'épuise pas les propriétés des ensembles. Ce sur quoi existe un consensus quasiment général, c'est sur le fait que les axiomes de ZF expriment des propriétés des ensembles que notre intuition recommande de tenir pour vraies. Autrement dit, nous jugeons opportun de prendre ces axiomes comme point de départ et d'accepter comme valides leurs conséquences. Mais personne — en tout cas aucun spécialiste de théorie des ensembles — n'a jamais prétendu que les axiomes de ZF épuisent notre intuition des ensembles. L'exploration de cette notion est en cours, et il se peut très bien que, dans le futur, un consensus émerge sur l'opportunité d'ajouter de nouveaux axiomes, au fur et à mesure qu'on reconnaîtra comme pertinentes de nouvelles propriétés des ensembles et de l'infini. Ainsi les résultats de Gödel et Cohen ont *ouvert* le problème du continu bien plus qu'ils ne l'ont fermé.

¹¹Il ne semble pas que Cantor ait anticipé cet aspect du développement de la théorie des ensembles

3.6. Le problème du continu aujourd'hui. Près de cinquante ans après le résultat de Cohen, le problème du continu n'est pas réglé, mais des progrès importants ont été effectués et il n'est pas exclu qu'une solution apparaisse dans un futur assez proche.

Le développement majeur de la théorie des ensembles depuis les années 1970 a été l'émergence progressive, sur la base d'un corpus considérable de résultats convergents, d'un consensus quant à l'opportunité d'ajouter au système ZF des axiomes additionnels affirmant l'existence d'infinis de plus en plus grands — ce qui n'est qu'une itération naturelle de l'approche de Cantor [11, 12, 18]. Ces axiomes, dits « de grands cardinaux », ont des formes techniques variées. Le plus important d'entre eux, l'axiome DP dit de *détermination projective*, s'exprime en termes de jeux infinis et on peut le voir comme une forme forte du principe du tiers exclu (si A n'est pas vrai, alors la négation de A est vraie). Le progrès technique principal a été un théorème démontré par Donald A. Martin et John Steel en 1985 et sa réciproque démontrée par Hugh Woodin en 1987 [16, 5]. Essentiellement, ces résultats montrent que le système ZF + DP fournit une description aussi satisfaisante du monde des ensembles dénombrables que ce que le système ZF fournit pour le monde des ensembles finis, à savoir une description qui, en pratique et de façon heuristique, apparaît complète : même si les théorèmes de Gödel empêchent une complétude formelle, et malgré les remarquables résultats de H. Friedman, force est de constater que jamais le défaut de complétude du système ZF n'est apparu comme un véritable facteur limitant en arithmétique ou en combinatoire finie. Sur la base du système ZF + DP, il en est de même pour le niveau suivant, qui est celui de la topologie et de l'analyse dans les ensembles projectifs au sens de Luzin¹². C'est précisément ce type de complétude heuristique qui suscite l'émergence progressive au sein de la communauté des théoriciens des ensembles — en attendant celle de tous les mathématiciens — d'un consensus pour ajouter l'axiome DP aux axiomes de ZF comme nouveau point de départ de la théorie des ensembles.

Dès lors, l'étude de l'univers des ensembles finis et des ensembles dénombrables est, en un sens, complète, et l'étape suivante est celle des ensembles de cardinalité \aleph_1 . C'est à ce niveau que le travail se poursuit depuis la fin des années 1980 [19]. Or, c'est là que se pose le problème du continu dans sa forme générale. Par exemple, le système ZF + DP entraîne que tous les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu, mais il ne dit rien — et ne peut rien dire — sur les ensembles de réels plus compliqués.

À l'heure actuelle, la situation reste ouverte, mais il existe au moins une approche qui mène à un enchaînement de théorèmes probant, à savoir l'approche développée par Hugh Woodin à partir de la notion dite d'absoluité générique, qui consiste, *grosso modo*, à privilégier les propriétés qui sont invariantes par l'action du forcing de Cohen. Ce que montre Woodin, ce sont deux résultats [20, 21, 6, 7], à savoir qu'il existe un axiome¹³ qui, ajouté à ZF + DP, donne, pour le niveau de \aleph_1 , le même type de description que ZF + DP donne pour le dénombrable, et, d'autre part, que *tout* axiome menant à la situation précédente entraîne nécessairement la fausseté de l'hypothèse du continu.

Ces travaux de Woodin ne constituent pas encore *la* solution du problème du continu pour plusieurs raisons : d'abord parce qu'il n'existe pas de consensus sur le point de vue adopté (chercher une axiomatisation basée sur la notion d'absoluité générique) [8], ensuite parce que les résultats de Woodin sont pour le moment conditionnés par une hypothèse technique (« la Ω -conjecture ») prédisant que tous les axiomes de grands cardinaux obéissent à certaines règles structurelles. Par contre, ce que montrent ces résultats, c'est qu'il est tout à fait possible de continuer à explorer la notion d'ensemble et que rien n'exclut que, dans un futur plus ou moins lointain, le corpus des résultats accumulés donnent à de nouveaux axiomes une évidence *a posteriori* qui suscite une large adhésion, comme c'est aujourd'hui le cas pour DP. Si ces nouveaux axiomes se trouvent impliquer soit l'hypothèse du continu, soit (comme les axiomes de Woodin) sa négation, alors on aura *résolu* le problème du continu. Dans tous les cas, l'existence-même de résultats comme ceux de Woodin semble indiquer que le problème du continu est tout sauf une question scholastique vide de sens, ainsi que l'ont parfois un peu imprudemment suggéré des mathématiciens pas véritablement experts du sujet.

¹²La famille des ensembles projectifs est la clôture de la famille des ensembles boréliens par image continue et complément

¹³L'axiome de Woodin exprime que le monde des ensembles est, en un certain sens, algébriquement clos, ce qui en fait une hypothèse très naturelle

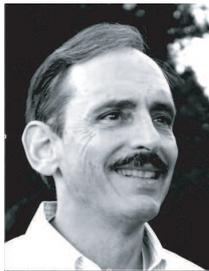


FIGURE 8. Hugh Woodin

3.7. Conclusion. En un sens, le problème du continu est un point mineur des mathématiques : peu d'applications dépendent vraiment de l'hypothèse du continu, et les seuls énoncés qui lui sont liés mettent en jeu des objets qui sont soit très grands, soit très compliqués, et sont à ce titre assez éloignés du cœur des mathématiques actuelles. C'est probablement l'une des raisons pour laquelle le problème du continu, premier sur la liste des problèmes de Hilbert en 1900, n'est plus mentionné un siècle plus tard dans la liste des problèmes du millénaire proposé par le Clay Institute [3] où, dans la catégorie des problèmes de fondement, l'a remplacé le problème $P=NP$. D'un autre côté, ce problème reste toujours aussi fascinant par son côté fondamental et son énoncé si simple, et il a été et reste le moteur de la recherche en théorie des ensembles. Il est certain qu'on en saura plus dans cent ans, et l'auteur de ces lignes serait bien curieux de savoir où on en sera alors du problème du continu et de l'exploration de l'infini. Dans tous les cas, si quelque chose est certain, c'est bien le fait que Cantor, par sa note anodine de 1874, a ouvert un monde et donné pour des siècles du grain à moudre aux mathématiciens.

Remerciements

Je remercie Pierre Ageron et Akihiro Kanamori pour les utiles précisions qu'ils m'ont apportées, ainsi que Jean Fichot qui m'a signalé la présence précoce d'une forme d'argument diagonal dans les travaux de Paul du Bois-Reymond.

Sources bibliographiques

- [1] C. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press (1985).
- [2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, *Crelles Journal für Mathematik* **77** (1874) 258–263.
- [3] Clay Mathematical Institute, *Millenium Problems*, <http://www.claymath.org/millennium/>.
- [4] J.W. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Mass, 1979; reprinted 1990.
- [5] P. Dehornoy, *La détermination projective d'après Martin*, *Steel et Woodin*, *Séminaire Bourbaki*, Astérisque **177–178** (1989) 261–276.
- [6] P. Dehornoy, *Progrès récents sur l'hypothèse du continu, d'après Woodin*, *Séminaire Bourbaki*, Astérisque **294** (2004) 147–172.
- [7] P. Dehornoy, *Au-delà du forcing: la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles*, in: *Logique, dynamique et cognition*, J.B. Joinet, ed., Publications de la Sorbonne (2007) pp. 147–169.
- [8] M. Foreman, *Has the continuum hypothesis been settled?*, *Proceedings Logic Colloquium '03*, *Lect. Notes in Logic*, Assoc. Symb. Logic **24** (2006) 56–75.
- [9] M. Foreman, A. Kanamori, eds., *Handbook of Set Theory*, <http://www.tau.ac.il/~rinot/host.html>.
- [10] gallica, (BNF), <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k86243w.notice>
- [11] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem?*, *Amer. Math. Monthly* **54** (1947) 515–545.
- [12] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer, Berlin, 1994.
- [13] A. Kanamori, *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, *Bull. Symb. Logic* **2** (1996) 1–71.

- [14] L. Kirby & J. Paris, *Accessible independence results for Peano Arithmetic*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982) 285–293.
- [15] Yu. Manin, *Georg Cantor and his heritage*, arXivmath.AG/0209244 (2002).
- [16] D.A. Martin & J.R. Steel, *A proof of projective determinacy*, J. Amer. Math. Soc. **2-1** (1989) 71–125.
- [17] J.J. O'Connor & E.F. Robertson, *Cantor*, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html>.
- [18] J. Steel, *Mathematics need new axioms*, Bull. Symb. Logic **6-4** (2000) 422–433.
- [19] H. Woodin, *Large cardinal axioms and independence: the continuum problem revisited*, Math. Intelligencer **16-3** (1994) 31–35.
- [20] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis, I & II*, Notices Amer. Math. Soc. **48-6** (2001) 567–576, & **8-7** (2001) 681–690.
- [21] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis*, Proceedings Logic Colloquium 2000, Ass. Symb. Logic (2005).

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES NICOLAS ORESME, UNIVERSITÉ DE CAEN, 14032 CAEN, FRANCE
E-mail address: dehornoy@math.unicaen.fr
URL: [//www.math.unicaen.fr/~dehornoy](http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy)