EN DEUX MOTS Le mathématicien allemand Georg Cantor a introduit un nouveau type de nombres, les nombres transfinis, qui permettent de comparer entre elles les tailles des ensembles infinis. Il est aussi à l'origine de la théorie des ensembles, l'un des fondements possibles des mathématiques. Il fut largement attaqué de son vivant, notamment en raison des implications philosophiques de ses travaux.

Georg Cantor, et les infinis furent

Avant lui, l'infini était une notion ayant trait au divin, inaccessible aux mathématiciens. Après lui, les infinis étaient devenus infiniment nombreux, accessibles et manipulables. Georg Cantor est à l'origine de l'un des plus grands sauts conceptuels du XIX[e] siècle.

Mathieu Nowak est journaliste à *La Recherche*.

* Une **série trigonométrique** est une suite de fonctions de la forme $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

Dans le cadre des conférences **UN TEXTE, UN MATHÉMATICIEN** le 18 mars à 18 h 30 « Cantor et les infinis » par Patrick Dehornoy, de l'université de Caen. Bibliothèque François-Mitterrand http://smf.emath.fr/BNF/2009

Société Mathématique de France SMF

Retrouvez Patrick Dehornoy et Martin Andler, de la SMF, sur France Culture le 16 mars à 14 heures, dans l'émission Continent Sciences animée par Stéphane Deligeorges.

« *Je ne vois vraiment pas ce qui pourrait nous retenir dans cette activité créatrice de nouveaux nombres, dès lors que pour le progrès de la science, l'introduction d'une nouvelle classe de nombres est devenue souhaitable, ou même indispensable.* » Georg Cantor savait qu'il se devait de prendre de grandes précautions pour introduire, en 1883, ses nombres infinis, baptisés « nombres transfinis » ; des nombres qui devaient permettre de quantifier l'infini, et même de faire des calculs dessus. En cette fin de XIX[e] siècle, il était en effet le premier à ne plus considérer l'infini autrement que comme potentiel, c'est-à-dire comme limite inatteignable. Jusque-là, pour les mathématiciens, parler d'infini était une sorte d'abus de langage pour parler de limites. Mais Cantor, en introduisant ses nombres transfinis, donnait à l'infini le même statut qu'aux nombres finis ou aux irrationnels. Pour lui, il y avait une infinité de nombres transfinis ; on pouvait les comparer, les additionner, les soustraire comme on le fait avec n'importe quels autres nombres.

Sa grande interrogation était la différence entre le continu et le dénombrable

Terrain inconnu

Cantor ne se contentait pas de contredire Descartes, selon lequel notre esprit ne peut concevoir que des choses finies, mais, surtout, il engageait les mathématiques sur un terrain qui leur était jusque-là inaccessible, sinon interdit : concevoir l'infini, c'était un peu décrire l'absolu. Pour la première fois, quelqu'un démontrait rigoureusement un résultat mettant en jeu un infini, et cet infini n'était pas Dieu.

Pourquoi Cantor s'est-il intéressé à l'infini ? Il était chargé de cours à l'université de Halle au début des années 1870 quand l'un de ses collègues, Edouard Heine, lui suggéra de s'attaquer au problème de l'unicité de la représentation d'une fonction comme une série trigonométrique*. Plusieurs grands mathématiciens du XIX[e] siècle, par exemple Dirichlet, Lipschitz ou Riemann, avaient déjà essayé de le résoudre, en vain. Cantor décida de relever le défi et abandonna la théorie des nombres, qui l'avait occupé jusque-là, pour embrasser l'analyse.

On a la grande chance d'avoir des traces précises de l'évolution de la pensée de Cantor au travers d'une riche correspondance qu'il a entretenue pendant une quinzaine d'années avec son ami Richard Dedekind. Cantor avait rencontré Dedekind au hasard d'un voyage en Suisse. Ils avaient des objectifs communs dans leurs travaux, et souhaitaient notamment éliminer la géométrie des démonstrations d'analyse. Cantor écrivait à Dedekind chacune de ses avancées, de ses implications et des questions qu'elle engendrait.

GEORG CANTOR, mathématicien allemand né en 1845 à Saint-Pétersbourg, a traversé à partir de 1884 plusieurs dépressions. Selon certains auteurs, elles étaient la conséquence du rejet de ses travaux par nombre de ses pairs. Pour d'autres, elles étaient liées au caractère obsessionnel de ses réflexions sur le problème du continu.

La notion d'infini existait déjà, sous la forme de limite, dans les séries trigonométriques, car il s'agissait de sommes infinies. Les travaux de Cantor le conduisirent à formuler deux théorèmes, et l'un d'entre eux sous-entendait qu'il existait des ensembles comptant un nombre infini d'éléments, inclus dans l'ensemble des nombres réels.

En 1873, Cantor posa cette question : tous les infinis sont-ils équivalents ou bien en existe-t-il plusieurs espèces? Par exemple, y a-t-il autant de nombres entiers que de nombres réels? À l'époque on opposait la notion de « continu » à celle de « dénombrable ». La famille des entiers était le dénombrable, parce que les entiers permettaient de la dénombrer. À l'opposé, les réels formaient un « continu ». La question était donc : l'infini du continu est-il différent de l'infini du dénombrable? Cantor s'interrogeait davantage sur la différence entre « dénombrable » et « continu » que sur la notion d'infini en elle-même.

On retrouve cette interrogation dans sa correspondance avec Dedekind à la fin de l'année 1873. Cantor demandait s'il existait une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres réels. À l'époque, le mot « bijection » n'existait pas encore : Cantor avait introduit ce concept en parlant de « correspondance ». Dire que des éléments sont dénombrables revenait à prétendre que l'on pouvait faire une correspondance unique entre ces éléments et les entiers naturels. Si la correspondance existe, il est possible d'associer à chaque entier naturel un réel unique, et réciproquement.

Indénombrables réels

Comme l'ensemble des entiers naturels est discret (sans trou) et celui des réels continu, Cantor pressentait qu'il ne devait pas exister de bijection entre les deux. Encore fallait-il le démontrer sans se fier à l'intuition : Dedekind et Cantor démontrèrent tous les deux que, de façon surprenante, il existe une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et celui des nombres rationnels (les quotients exacts de deux entiers).

En décembre 1873, Cantor parvint à prouver que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable. Il utilisa pour cela le principe des « segments emboîtés », qui consiste à subdiviser infiniment un intervalle quelconque de réels et à montrer que l'hypothèse d'une quantité dénombrable de réels conduit à une contradiction.

À partir de là, on voyait combien le monde de l'infini est compliqué. Il y a plus de nombres réels que d'entiers naturels. Autant de rationnels que d'entiers. Autant de pairs que d'entiers. Beaucoup plus de transcendants* que de rationnels. Beaucoup plus de transcendants que de nombres algébriques*. Comme les réels ne sont pas dénombrables et que les algébriques le sont, Cantor en a déduit que la plupart des nombres réels sont transcendants. Au moment de publier, début 1874, Cantor suivit les conseils de son ancien professeur, Karl Weierstrass, évitant tout commentaire sur l'infini des ensembles.

Près de vingt ans plus tard, en 1891, Cantor proposa une nouvelle démonstration de la non-dénom- ⇨

* Les **nombres transcendants** ont été définis par Liouville en 1851 comme n'étant solutions d'aucune équation à coefficients entiers.

* Les **nombres algébriques** sont les nombres réels solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers.

*Le **cardinal** d'un ensemble est le nombre d'éléments de cet ensemble, considérés indépendamment de leur ordre.

[1] « Jean-Yves Girard : "Le plus difficile est de formuler le problème" », *La Recherche*, avril 2007, p. 37.

POUR EN SAVOIR PLUS

- Jean-Pierre Belna, *Cantor*, Belles Lettres, 2000.
- Joseph Dauben, *Georg Cantor*, Princeton University Press, 1990.

⇨ brabilité de l'ensemble des réels. Celle-ci était plus simple, et, surtout, elle faisait appel à un nouveau procédé : la diagonalisation. Il consiste, à partir d'une suite de réels, à écrire dans un tableau carré les chiffres de leur développement décimal, puis à former, à partir des chiffres de la diagonale, un nouveau réel [fig. 1]. On montre que ce nombre ne peut être égal à aucun de ceux de la suite de départ. Obtenir ce nouveau nombre permettait de dire que la liste des réels ne pouvait jamais être exhaustive.

Puissance d'un ensemble

La technique de la diagonalisation a été reprise, entre autres, par Bertrand Russell, Kurt Gödel et Alan Turing au début du XX^e siècle. Elle a notamment permis de répondre sans ambiguïté par la négative à la question : « Peut-on répondre à toutes les questions ? », en écrivant les énoncés avec des chiffres que l'on place dans des tableaux infinis puis en faisant des opérations sur la diagonale [1].

Bien avant ces développements, mais toujours en réfléchissant à l'existence de correspondances entre ensembles infinis, Cantor avait ouvert les portes d'une nouvelle théorie : la théorie des ensembles. Sa question suivante était de savoir si l'on peut trouver une correspondance entre une surface (par exemple un carré) et une droite, de façon à ce que chaque point de la surface corresponde à un et un seul point de la droite. En d'autres termes : y a-t-il une bijection

Fig.1 La diagonalisation

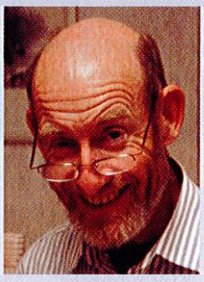
L'ARGUMENT DIAGONAL permet de montrer qu'il est impossible de numéroter tous les réels (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas dénombrables). L'une de ses formes consiste à écrire les réels avec leur infinité de décimales dans un tableau. On lit le nombre sur la diagonale (en vert). Si l'on enlève 1 à chacun des chiffres de ce nombre, on obtient un nouveau nombre (en rouge) qui ne peut pas être un nombre du tableau.

3.14159...
1.41421...
1.73205...
2.23606...
2.71828...
0.14285...
↓
3.43625...
↓
2.32514...

entre une courbe et une surface ? Cantor pensait que non. Pourtant, à sa grande surprise, il parvint à établir une correspondance entre les points de l'intervalle [0,1] et les points d'un carré. Il étendit ensuite son résultat en établissant même une bijection entre tout espace de dimension 1 et tout espace de dimension *n*. Il transmit ses démonstrations à Dedekind en précisant : *« Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas. »* Une nouvelle fois, la démonstration eut pourtant raison de l'intuition.

Peu à peu émergea la notion de puissance (ou cardinal*) d'un ensemble : deux ensembles ont la même puissance s'ils sont liés par une bijection. Avec Cantor,

Patrick Dehornoy : « Une théorie méconnue à l'image faussée »



PATRICK DEHORNOY est professeur à l'université de Caen et membre senior de l'Institut universitaire de France.

« Cantor est le créateur de la théorie de l'infini. Avant lui, l'infini existait, mais pas comme objet de théorie ; il était matière à réflexion, mais pas sujet de démonstration. Dans son article de cinq pages paru en 1874, Cantor a montré deux résultats d'allure anodine : on peut numéroter les nombres algébriques ; on ne peut pas numéroter les nombres réels. Sur le plan technique, la démonstration est simple, mais les implications de ces résultats sont très importantes : ce que Cantor a montré ainsi, c'est qu'il existe au moins deux infinis différents, et donc qu'on peut démontrer des théorèmes sur l'infini qui, de ce fait, devient un objet mathématique – presque – comme les autres.

L'héritage de cet article fondateur et des autres travaux de Cantor qui l'ont suivi, c'est la théorie des ensembles, un des monuments des mathématiques du XX^e siècle. Au demeurant, cette théorie est méconnue, et on en a souvent une image faussée. Au milieu du XX^e siècle, elle a exercé une telle fascination qu'on a souvent voulu en faire une sorte de théorie universelle, à la base de tout, et jusque dans l'enseignement avec la mode des "maths modernes". Ce n'était ni ce que Cantor avait prévu ni même ce que ses successeurs avaient souhaité. Il y a eu là comme un malentendu, et le retour de balancier a été si fort que la théorie est aujourd'hui largement oubliée, même à l'université.

Pourtant, la théorie des ensembles continue à se développer. Plusieurs équipes de mathématiciens de par le monde – mais peu en France – travaillent sur ce domaine et avancent. Le problème du continu, qui a occupé toute la fin de la vie scientifique de Cantor, reste la question centrale. Il s'agit de classer les infinis par taille croissante : le premier infini – le plus petit – est celui des entiers. Comme il y a plus de réels que d'entiers, l'infini des réels doit venir plus loin ; mais est-ce le deuxième infini, le troisième, vient-il plus loin encore ? Cantor penchait pour la deuxième position, mais il n'a jamais pu le démontrer, et la question est restée ouverte. Peut-être ne le sera-t-elle plus très longtemps : en 2001, le mathématicien américain Hugh Woodin a démontré des résultats encore partiels mais suggérant que l'intuition de Cantor était peut-être erronée. Finalement, les réels ne seraient pas le deuxième infini... » ■

Propos recueillis par M. N.

cette puissance pouvait être infinie, et être comparée à d'autres puissances infinies. Ce fut le premier point de sa « contribution à la théorie des ensembles », qu'il publia en 1878.
Mais nul n'est prophète en son pays. Cantor dut essuyer des oppositions aussi nombreuses que violentes. Pour certains mathématiciens, et en premier lieu l'un de ses anciens professeurs à l'université de Berlin, Leopold Kronecker, les idées de Cantor n'étaient que spéculations. Il le traita de charlatan, de renégat et qualifia son travail de « supercherie ».
L'un des principaux points sur lequel Cantor fut attaqué était l'idée selon laquelle il existe une infinité d'infinis. La théorie des nombres transfinis a été perçue comme contre-intuitive voire choquante, car on ne la dissociait pas de sa dimension métaphysique et théologique. Admettre qu'il y avait plusieurs infinis, n'était-ce pas remettre en question l'existence d'un infini unique et divin ? L'infini était, en philosophie, un concept intimement lié à Dieu. Cantor ne voulait pas s'opposer à la religion – lui-même était croyant et disait que sa théorie des nombres transfinis lui avait été soufflée par Dieu –, mais il proposait un cadre de pensée différent.

Philosophe et théologien

Cantor, aux réactions imprévisibles, exigeant en amitié et parfois porté à la paranoïa, prit la décision au début des années 1880 de délaisser les mathématiques au profit de la philosophie et la théologie. Il espérait trouver un meilleur accueil auprès de leurs spécialistes qu'auprès de ses pairs. Il s'essaya à l'enseignement en philosophie mais y renonça rapidement, faute d'étudiants à ses cours. Il publia néanmoins (en 1888) les lettres qu'il échangea avec plusieurs philosophes sur les conséquences de ses travaux.
Plus tard, les hommages seront à la hauteur des attaques. Ainsi David Hilbert a déclaré en 1925 (soit sept ans après la mort de Cantor) que la théorie cantorienne des nombres transfinis est *« la fleur et la perfection de l'esprit mathématique et l'une des plus sublimes réalisations de l'activité intellectuelle pure de l'homme »*. La théorie des ensembles a même été vue comme un élément essentiel des fondements des mathématiques. « *La théorie des ensembles,* [c'est un] *paradis dont nul ne doit pouvoir nous chasser* », poursuivait le même Hilbert de façon imagée.
Entre 1872 (date de ses premiers travaux sur les ensembles et les transfinis) et 1897 (fin de son exposé « définitif » de sa théorie), Cantor a introduit une rupture dans la façon dont on fait des mathématiques. Il y a un « avant » et un « après » Cantor. Paradoxalement, Cantor n'a pas eu d'élève ou de disciple. Pourtant, la plupart des mathématiciens lui doivent une partie de ce qui fait leur bagage commun : la possibilité de raisonner sur l'infini autant que sur le fini. **M. N.**