L'HYPOTHESE DU CONTINU ET LA Ω-LOGIQUE DE WOODIN

Patrick Dehornoy
Laboratoire Nicolas Oresme, Caen

L'HYPOTHESE DU CONTINU ET LA Ω-LOGIQUE DE WOODIN

Patrick Dehornoy
Laboratoire Nicolas Oresme, Caen

- Comment aller au-delà des résultats d'indécidabilité en théorie des ensembles?

  $\rightsquigarrow$ Introduction au résultat de W. Hugh Woodin:

«Si la Ω-conjecture est vraie,
alors l'hypothèse du continu est essentiellement fausse.»

L'HYPOTHESE DU CONTINU ET LA Ω-LOGIQUE DE WOODIN

Patrick Dehornoy
Laboratoire Nicolas Oresme, Caen

• Comment aller au-delà des résultats d'indécidabilité en théorie des ensembles?

$\rightsquigarrow$ Introduction au résultat de W. Hugh Woodin:

«Si la Ω-conjecture est vraie,
alors l'hypothèse du continu est essentiellement fausse.»

• La Ω-conjecture (dont un large fragment est établi) met en jeu une logique des grands cardinaux: la Ω-logique.

$\rightsquigarrow$ Nouveau cadre conceptuel restaurant l'unité et l'intelligibilité de la théorie des ensembles.

$\rightsquigarrow$ Urgent que ces résultats soient rendus accessibles.

L’hypothèse du continu

L'hypothèse du continu

- **Conjecture:** (Cantor, $\sim$1890) **HC**:

  Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu

- **Conjecture:** (Cantor, $\sim$1890) **HC**:

  Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

- **Consensus:** Système **ZFC** (Zermelo–Fraenkel) comme départ

  $\rightsquigarrow$ Première question: **HC** ou $\neg$**HC** prouvable à partir de **ZFC**?

L'hypothèse du continu

- **Conjecture:** (Cantor, $\sim$1890) **HC**:

  Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

- **Consensus:** Système **ZFC** (Zermelo–Fraenkel) comme départ

  $\rightsquigarrow$ Première question: **HC** ou $\neg$**HC** prouvable à partir de **ZFC**?

- **Théorème:** (Gödel, 1938) Si **ZFC** est non contradictoire, alors $\neg$**HC** est non prouvable à partir de **ZFC**.

L'hypothèse du continu

- **Conjecture:** (Cantor, $\sim$1890) **HC**:

  Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

- **Consensus:** Système **ZFC** (Zermelo–Fraenkel) comme départ

  $\rightsquigarrow$ Première question: **HC** ou $\neg$**HC** prouvable à partir de **ZFC**?

- **Théorème:** (Gödel, 1938) Si **ZFC** est non contradictoire, alors $\neg$**HC** est non prouvable à partir de **ZFC**.
- **Théorème:** (Cohen, 1963) Si **ZFC** est non contradictoire, alors **HC** est non prouvable à partir de **ZFC**.

L'hypothèse du continu

- **Conjecture:** (Cantor, $\sim$1890) **HC**:

  Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

- **Consensus:** Système **ZFC** (Zermelo–Fraenkel) comme départ

  $\rightsquigarrow$ Première question: **HC** ou $\neg$**HC** prouvable à partir de **ZFC**?

- **Théorème:** (Gödel, 1938) Si **ZFC** est non contradictoire, alors $\neg$**HC** est non prouvable à partir de **ZFC**.
- **Théorème:** (Cohen, 1963) Si **ZFC** est non contradictoire, alors **HC** est non prouvable à partir de **ZFC**.

$\rightsquigarrow$ **ZFC** incomplet

Axiomes additionnels

Axiomes additionnels

- Quels axiomes?
  - ⇝ Comment reconnaître un bon axiome?
  - ⇝ Que serait une solution du problème du continu?

Axiomes additionnels

- Quels axiomes?
  - $\rightsquigarrow$ Comment reconnaître un bon axiome?
  - $\rightsquigarrow$ Que serait une solution du problème du continu?

- Exemple fondamental: axiomes de grands cardinaux:
  - $\rightsquigarrow$ analogues à l'axiome «Il existe un ensemble infini».

Axiomes additionnels

- Quels axiomes?
  - $\rightsquigarrow$ Comment reconnaître un bon axiome?
  - $\rightsquigarrow$ Que serait une solution du problème du continu?

- Exemple fondamental: axiomes de grands cardinaux:
  - $\rightsquigarrow$ analogues à l'axiome «Il existe un ensemble infini».

- **Consensus**(?): Les axiomes de grands cardinaux sont vrais.
  - $\rightsquigarrow$ Ne considérer que des axiomes compatibles avec l'existence des grands cardinaux.

Forcing et incomplétude

Forcing et incomplétude

• Système **ZFC** = liste d'axiomes portant sur la relation $\in$:

$\rightsquigarrow$ modèle de **ZFC**: structure (M, E) avec E relation binaire sur M satisfaisant aux axiomes de **ZFC**;

$\rightsquigarrow$ "exemple": $(V, \in)$ (vrais ensembles, vraie appartenance).

Forcing et incomplétude

• Système **ZFC** = liste d'axiomes portant sur la relation $\in$:

$\rightsquigarrow$ modèle de **ZFC**: structure (M, E) avec E relation binaire sur M satisfaisant aux axiomes de **ZFC**;

$\rightsquigarrow$ "exemple": $(V, \in)$ (vrais ensembles, vraie appartenance).

• Méthode du forcing: Partant d'un modèle M de **ZFC**, extension $M[G]$ décrite par un ensemble $\mathbb{P}$ de M;

$\rightsquigarrow$ (Cohen) : Construire $M[G]$ satisfaisant $\neg$**HC**.

$\rightsquigarrow$ **HC** non prouvable à partir de **ZFC**.

Forcing et incomplétude

• Système **ZFC** = liste d'axiomes portant sur la relation $\in$:

$\rightsquigarrow$ modèle de **ZFC**: structure (M, E) avec E relation binaire sur M satisfaisant aux axiomes de **ZFC**;

$\rightsquigarrow$ "exemple": $(V, \in)$ (vrais ensembles, vraie appartenance).

• Méthode du forcing: Partant d'un modèle M de **ZFC**, extension $M[G]$ décrite par un ensemble $\mathbb{P}$ de M;

$\rightsquigarrow$ (Cohen) : Construire $M[G]$ satisfaisant $\neg$**HC**.

$\rightsquigarrow$ **HC** non prouvable à partir de **ZFC**.

• Manifestation fréquente de l'incomplétude de **ZFC** (cas ϕ et $\neg\phi$ non prouvables à partir de **ZFC**): partant de M

- il existe un forcing $\mathbb{P}_1$ tel que $M[G_1]$ satisfasse ϕ,
- il existe un forcing $\mathbb{P}_2$ tel que $M[G_2]$ satisfasse $\neg\phi$.

$\rightsquigarrow$ navrante symétrie entre ϕ et $\neg\phi$...

Le cas de l'arithmétique

Le cas de l'arithmétique

- **Fait:** Les propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont invariantes par forcing.

Le cas de l'arithmétique

• **Fait:** Les propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont invariantes par forcing.

• **(Conséquence):** $\mathbf{ZFC}$ efficace pour $(\mathbb{N}, +, \times)$:
description empiriquement complète
(même si incomplète par le théorème de Gödel).

$\rightsquigarrow$ **ZFC** suffisant au niveau de l'arithmétique

Le cas de l'arithmétique

- **Fait:** Les propriétés de $(\mathbb{N}, +, \times)$ sont invariantes par forcing.

- **(Conséquence):** $\mathbf{ZFC}$ efficace pour $(\mathbb{N}, +, \times)$:

  description empiriquement complète

  (même si incomplète par le théorème de Gödel).

  $\rightsquigarrow$ **ZFC** suffisant au niveau de l'arithmétique

$\rightsquigarrow$ **Question:** même situation pour d'autres fragments ?

Bonnes axiomatisations

Bonnes axiomatisations

• **Définition:** Appelons bonne axiomatisation pour un fragment $\mathbf{H}$ de $\mathbf{V}$ un système axiomatique, $\mathbf{ZFC}$, ou $\mathbf{ZFC}$ plus axiome compatible avec grands cardinaux, rendant les propriétés de $(\mathbf{H}, \in)$ invariantes par forcing.

Bonnes axiomatisations

• **Définition:** Appelons bonne axiomatisation pour un fragment $\mathbf{H}$ de $\mathbf{V}$ un système axiomatique, **ZFC**, ou **ZFC** plus axiome compatible avec grands cardinaux, rendant les propriétés de $(\mathbf{H}, \in)$ invariantes par forcing.

$\rightsquigarrow$ Gel des propriétés de $\mathbf{H}$ vis-à-vis du forcing

$\rightsquigarrow$ description empiriquement complète de $\mathbf{H}$

Bonnes axiomatisations

• **Définition:** Appelons bonne axiomatisation pour un fragment $\mathbf{H}$ de $\mathbf{V}$ un système axiomatique, **ZFC**, ou **ZFC** plus axiome compatible avec grands cardinaux, rendant les propriétés de $(\mathbf{H}, \in)$ invariantes par forcing.

$\rightsquigarrow$ Gel des propriétés de $\mathbf{H}$ vis-à-vis du forcing

$\rightsquigarrow$ description empiriquement complète de $\mathbf{H}$

• N'existe pas forcément; si existe, pas forcément unique.

Bonnes axiomatisations

• **Définition:** Appelons bonne axiomatisation pour un fragment $\mathbf{H}$ de $\mathbf{V}$ un système axiomatique, **ZFC**, ou **ZFC** plus axiome compatible avec grands cardinaux, rendant les propriétés de $(\mathbf{H}, \in)$ invariantes par forcing.

$\rightsquigarrow$ Gel des propriétés de $\mathbf{H}$ vis-à-vis du forcing

$\rightsquigarrow$ description empiriquement complète de $\mathbf{H}$

• N'existe pas forcément; si existe, pas forcément unique.

• **Fait:** **ZFC** est une bonne axiomatisation pour $(\mathbb{N}, +, \times)$.

Vérité essentielle

Vérité essentielle

• **Définition (Consensus ?)**: Supposons que ϕ porte sur $(\mathbf{H}, \in)$ et que ni ϕ, ni $\neg\phi$ ne sont prouvables à partir de **ZFC**. Alors ϕ est déclarée essentiellement vraie si

- (i) il existe au moins une bonne axiomatisation de $\mathbf{H}$, et
- (ii) toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}$ entraîne ϕ.

Vérité essentielle

• **Définition (Consensus ?)**: Supposons que ϕ porte sur $(\mathbf{H}, \in)$ et que ni ϕ, ni $\neg\phi$ ne sont prouvables à partir de **ZFC**. Alors ϕ est déclarée essentiellement vraie si

- (i) il existe au moins une bonne axiomatisation de $\mathbf{H}$, et
- (ii) toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}$ entraîne ϕ.

« Toute axiomatisation gelant les propriétés de $\mathbf{H}$ vis-à-vis du forcing (= neutralisant le forcing au niveau de $\mathbf{H}$) entraîne ϕ. »

Vérité essentielle

• **Définition (Consensus ?)**: Supposons que ϕ porte sur $(\mathbf{H}, \in)$ et que ni ϕ, ni $\neg\phi$ ne sont prouvables à partir de **ZFC**. Alors ϕ est déclarée essentiellement vraie si

- (i) il existe au moins une bonne axiomatisation de $\mathbf{H}$, et
- (ii) toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}$ entraîne ϕ.

« Toute axiomatisation gelant les propriétés de $\mathbf{H}$ vis-à-vis du forcing (= neutralisant le forcing au niveau de $\mathbf{H}$) entraîne ϕ. »

«Quand on abaisse la température suffisamment pour geler les propriétés de $\mathbf{H}$, la symétrie entre ϕ et $\neg\phi$ est brisée, et il ne reste que ϕ.»

Les structures H_k

Les structures H_k

- **Notation**: $H_k = \{X \;;\; X$ héréditairement de cardinal $< \aleph_k\}$

  $\rightsquigarrow$ $(H_0, \in)$ ens. hér. finis, $(H_1, \in)$ ens. hér. dénombrables,...

Les structures H_k

- **Notation**: $H_k = \{X \,;\, X$ héréditairement de cardinal $< \aleph_k\}$
  $\rightsquigarrow$ $(H_0, \in)$ ens. hér. finis, $(H_1, \in)$ ens. hér. dénombrables,...

- **Fait**: « $(H_0, \in)$ équivaut à $(\mathbb{N}, +, \times)$ »;
  $\rightsquigarrow$ **ZFC** bonne axiomatisation pour $(H_0, \in)$;
  $\rightsquigarrow$ Bonnes axiomatisations pour $(H_1, \in)$, $(H_2, \in)$, etc.?
  - **ZFC** n'est pas bonne axiomatisation pour H_1;
  - **HC** porte sur $(H_2, \in)$ $\rightsquigarrow$ bonne axiomatisation pour H_2?

Les structures H_k

- **Notation**: $H_k = \{X\ ;\ X$ héréditairement de cardinal $< \aleph_k\}$

  $\rightsquigarrow$ $(H_0, \in)$ ens. hér. finis, $(H_1, \in)$ ens. hér. dénombrables,...

- **Fait**: « $(H_0, \in)$ équivaut à $(\mathbb{N}, +, \times)$ »;

  $\rightsquigarrow$ **ZFC** bonne axiomatisation pour $(H_0, \in)$;

  $\rightsquigarrow$ Bonnes axiomatisations pour $(H_1, \in)$, $(H_2, \in)$, etc.?

  - **ZFC** n'est pas bonne axiomatisation pour H_1;
  - **HC** porte sur $(H_2, \in)$ $\rightsquigarrow$ bonne axiomatisation pour H_2?

- **Théorème:** (Woodin, Martin–Steel, 1985) **ZFC** $+$ **DP** est une bonne axiomatisation pour H_1.

Les structures H_k

• **Notation**: $H_k = \{X\ ;\ X$ héréditairement de cardinal $< \aleph_k\}$

$\rightsquigarrow$ $(H_0, \in)$ ens. hér. finis, $(H_1, \in)$ ens. hér. dénombrables,...

• **Fait**: « $(H_0, \in)$ équivaut à $(\mathbb{N}, +, \times)$ »;

$\rightsquigarrow$ **ZFC** bonne axiomatisation pour $(H_0, \in)$;

$\rightsquigarrow$ Bonnes axiomatisations pour $(H_1, \in)$, $(H_2, \in)$, etc.?

- **ZFC** n'est pas bonne axiomatisation pour H_1;
- **HC** porte sur $(H_2, \in)$ $\rightsquigarrow$ bonne axiomatisation pour H_2?

• **Théorème:** (Woodin, Martin–Steel, 1985) **ZFC** $+$ **DP** est une bonne axiomatisation pour H_1.

• **Théorème:** (Woodin, 1995) Sous réserve que **MMW** soit compatible avec l'existence de grands cardinaux, **ZFC** $+$ **MMW** est une bonne axiomatisation pour H_2.

Axiomes

Axiomes

- Une partie A de $[0, 1]$ est déterminée si on a

$$(\exists\epsilon_1)(\forall\epsilon_2)(\exists\epsilon_3)(\forall\epsilon_4)\dots(\overline{0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\dots} \in A) \text{ ou}$$

$$(\forall\epsilon_1)(\exists\epsilon_2)(\forall\epsilon_3)(\exists\epsilon_4)\dots(\overline{0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\dots} \notin A).$$

Axiome **DP**: («axiome de détermination projective»): Tous les ensembles projectifs sont déterminés.

Axiomes

- Une partie A de $[0,1]$ est déterminée si on a

$$(\exists\epsilon_1)(\forall\epsilon_2)(\exists\epsilon_3)(\forall\epsilon_4)\ldots(\overline{0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\ldots} \in A) \text{ ou}$$

$$(\forall\epsilon_1)(\exists\epsilon_2)(\forall\epsilon_3)(\exists\epsilon_4)\ldots(\overline{0,\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\ldots} \notin A).$$

Axiome **DP**: («axiome de détermination projective»): Tous les ensembles projectifs sont déterminés.

- Théorème (Baire): «Si X est localement compact, toute intersection de $\aleph_0$ ouverts denses de X est dense».

$\rightsquigarrow$ Axiome **MA** (Martin): «Si X est local[t] compact et toute famille d'ouverts 2 à 2 disjoints est au plus dénombrable, toute intersection de $\aleph_1$ ouverts denses de X est dense».

$\rightsquigarrow$ Ax. «Martin maximal» **MM** (Foreman-Magidor-Shelah).

Axiome **MMW** («axiome de Martin maximum de Woodin»): variante de **MM**.

La Ω-logique de Woodin

Logique incluant l'invariance par forcing: «voir net malgré le flou introduit par forcing» $\rightsquigarrow$ tableau cohérent et unifié.

La Ω-logique de Woodin

Logique incluant l'invariance par forcing: «voir net malgré le flou introduit par forcing» $\rightsquigarrow$ tableau cohérent et unifié.

• **Définition:** (Woodin) Un sous-ensemble universellement Baire B de $\mathbb{R}$ est une Ω-preuve pour un énoncé ϕ si ϕ vrai dans tout modèle dénombrable M de **ZFC** tel que B reste universellement Baire dans toute extension par forcing de M. (B est univ. Baire si, pour tous $f : K \to \mathbb{R}$ continue et K compact, $f^{-1}(B)$ a la propriété de Baire.)

La Ω-logique de Woodin

Logique incluant l'invariance par forcing: «voir net malgré le flou introduit par forcing» $\rightsquigarrow$ tableau cohérent et unifié.

• **Définition:** (Woodin) Un sous-ensemble universellement Baire B de $\mathbb{R}$ est une Ω-preuve pour un énoncé ϕ si ϕ vrai dans tout modèle dénombrable M de **ZFC** tel que B reste universellement Baire dans toute extension par forcing de M. (B est univ. Baire si, pour tous $f : K \to \mathbb{R}$ continue et K compact, $f^{-1}(B)$ a la propriété de Baire.)

$\rightsquigarrow$ En Ω-logique, une preuve est un ensemble de réels.

La Ω-logique de Woodin

Logique incluant l'invariance par forcing: «voir net malgré le flou introduit par forcing» $\rightsquigarrow$ tableau cohérent et unifié.

• **Définition:** (Woodin) Un sous-ensemble universellement Baire $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}$ est une Ω-preuve pour un énoncé ϕ si ϕ vrai dans tout modèle dénombrable $\mathbf{M}$ de **ZFC** tel que $\mathbf{B}$ reste universellement Baire dans toute extension par forcing de $\mathbf{M}$. ($\mathbf{B}$ est univ. Baire si, pour tous $f : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$ continue et $\mathbf{K}$ compact, $f^{-1}(\mathbf{B})$ a la propriété de Baire.)

$\rightsquigarrow$ En Ω-logique, une preuve est un ensemble de réels.

• **Fait:** Prouvable entraîne Ω-prouvable; réciproque fausse.
Si ϕ est prouvable (au sens usuel), alors ϕ vrai dans tout modèle, donc tout ensemble univ. Baire Ω-prouve ϕ.

La Ω-conjecture

La Ω-conjecture

- **Définition:** Un énoncé ϕ est Ω-valide si aucune extension par forcing de $\mathbf{V}$ («vrais ensembles») ne satisfait $\neg\phi$.

La Ω-conjecture

- **Définition:** Un énoncé ϕ est Ω-valide si aucune extension par forcing de $\mathbf{V}$ («vrais ensembles») ne satisfait $\neg\phi$.

- **Fait:** La Ω-logique est cohérente:

  Ω-prouvable entraîne Ω-valide.

La Ω-conjecture

• **Définition:** Un énoncé ϕ est Ω-valide si aucune extension par forcing de $\mathbf{V}$ («vrais ensembles») ne satisfait $\neg\phi$.

• **Fait:** La Ω-logique est cohérente:

Ω-prouvable entraîne Ω-valide.

• **Ω-Conjecture:** (Woodin) La Ω-logique est complète:

Ω-valide entraîne Ω-prouvable.

«Tout ce qui ne peut pas être réfuté par forcing a un témoin dans la famille des ensembles universellement Baire»

Ω-logique et modèles canoniques

«La Ω-logique est la logique des grands cardinaux.»

Ω-logique et modèles canoniques

«La Ω-logique est la logique des grands cardinaux.»

- Programme des modèles canoniques pour les grands cardinaux (Gödel, Jensen, Solovay, Kunen, Mitchell, Steel)

Ω-logique et modèles canoniques

«La Ω-logique est la logique des grands cardinaux.»

- Programme des modèles canoniques pour les grands cardinaux (Gödel, Jensen, Solovay, Kunen, Mitchell, Steel)

- **Théorème:** (Woodin) Un énoncé ϕ est Ω-prouvable ssi ϕ est prouvable (au sens usuel) à partir d'un axiome de grand cardinal pour lequel un modèle canonique est possible.

Ω-logique et modèles canoniques

«La Ω-logique est la logique des grands cardinaux.»

• Programme des modèles canoniques pour les grands cardinaux (Gödel, Jensen, Solovay, Kunen, Mitchell, Steel)

• **Théorème:** (Woodin) Un énoncé ϕ est Ω-prouvable ssi ϕ est prouvable (au sens usuel) à partir d'un axiome de grand cardinal pour lequel un modèle canonique est possible.

$\rightsquigarrow$ La Ω-conjecture équivaut à la possibilité d'un modèle canonique pour tout grand cardinal;

$\rightsquigarrow$ démontrée pour beaucoup de grands cardinaux;

$\rightsquigarrow$ centrale: modèles canoniques / th. descriptive / forcing.

Retour sur H_2

Retour sur H_2

La Ω-logique

- $\rightsquigarrow$ rend les choses intelligibles, et
- $\rightsquigarrow$ libère de l'incomplétude.

Retour sur H_2

La Ω-logique

$\rightsquigarrow$ rend les choses intelligibles, et

$\rightsquigarrow$ libère de l'incomplétude.

• Axiome **MMW**: «$\mathbf{H}_2$ est algébriquement clos en Ω-logique»

(Tout énoncé $\forall \ldots \exists \ldots$ sur $\mathbf{H}_2$ non Ω-contradictoire est satisfait).

Retour sur H_2

La Ω-logique

$\rightsquigarrow$ rend les choses intelligibles, et

$\rightsquigarrow$ libère de l'incomplétude.

• Axiome **MMW**: «$\mathbf{H_2}$ est algébriquement clos en Ω-logique»

(Tout énoncé $\forall\ldots\exists\ldots$ sur $\mathbf{H_2}$ non Ω-contradictoire est satisfait).

• **Théorème:** (Woodin) **MMW** est un axiome Ω-complet pour $\mathbf{H_2}$

(**MMW**$\Rightarrow\phi$ ou **MMW**$\Rightarrow\neg\phi$ est Ω-prouvable pour tout ϕ sur $\mathbf{H_2}$).

Retour sur H_2

La Ω-logique

$\rightsquigarrow$ rend les choses intelligibles, et

$\rightsquigarrow$ libère de l'incomplétude.

• Axiome **MMW**: «$\mathbf{H}_2$ est algébriquement clos en Ω-logique»
(Tout énoncé $\forall \ldots \exists \ldots$ sur $\mathbf{H}_2$ non Ω-contradictoire est satisfait).

• **Théorème:** (Woodin) **MMW** est un axiome Ω-complet pour $\mathbf{H}_2$
(**MMW**$\Rightarrow \phi$ ou **MMW**$\Rightarrow \neg\phi$ est Ω-prouvable pour tout ϕ sur $\mathbf{H}_2$).

$\rightsquigarrow$ Si la Ω-conjecture est vraie,
alors **ZFC**$+$**MMW** est une bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$.

L’hypothèse du continu

L'hypothèse du continu

• **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

L’hypothèse du continu

- **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

- Si la Ω-conjecture est vraie:

- toute bonne axiomatisation est basée sur un axiome Ω-complet,
- donc: toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ entraîne **HC** fausse.

L'hypothèse du continu

• **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour H_2 basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

• Si la Ω-conjecture est vraie:
- toute bonne axiomatisation est basée sur un axiome Ω-complet,
- donc: toute bonne axiomatisation pour H_2 entraîne **HC** fausse.

• Donc, si la Ω-conjecture est vraie:

L'hypothèse du continu

• **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

• Si la Ω-conjecture est vraie:
- toute bonne axiomatisation est basée sur un axiome Ω-complet,
- donc: toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ entraîne **HC** fausse.

• Donc, si la Ω-conjecture est vraie:
- il existe une bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ ($\mathbf{ZFC} + \mathbf{MMW}$),

L'hypothèse du continu

- **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour H_2 basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

- Si la Ω-conjecture est vraie:

\- toute bonne axiomatisation est basée sur un axiome Ω-complet,
\- donc: toute bonne axiomatisation pour H_2 entraîne **HC** fausse.

- Donc, si la Ω-conjecture est vraie:
  - il existe une bonne axiomatisation pour H_2 ($\mathbf{ZFC} + \mathbf{MMW}$),
  - toute bonne axiomatisation pour H_2 entraîne **HC** fausse:

L’hypothèse du continu

• **Théorème:** (Woodin, 2000) Toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ basée sur un axiome Ω-complet entraîne que **HC** est fausse.

• Si la Ω-conjecture est vraie:
- toute bonne axiomatisation est basée sur un axiome Ω-complet,
- donc: toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ entraîne **HC** fausse.

• Donc, si la Ω-conjecture est vraie:
- il existe une bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ (**ZFC** $+$ **MMW**),
- toute bonne axiomatisation pour $\mathbf{H}_2$ entraîne **HC** fausse:

$\rightsquigarrow$ **HC** est essentiellement fausse.

Conclusion

Conclusion

- Cas de $\mathbf{H}_1 \rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.
  Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

Conclusion

- Cas de $\mathrm{H}_1 \rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.

  Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

- Cas de $\mathrm{H}_2 \rightsquigarrow$ Il existe au moins une approche (= des théorèmes !): celle de Woodin avec la Ω-logique, et elle mène à **HC** fausse;

Conclusion

• Cas de $\mathsf{H}_1 \rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.

Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

• Cas de $\mathsf{H}_2 \rightsquigarrow$ Il existe au moins une approche (= des théorèmes !): celle de Woodin avec la Ω-logique, et elle mène à **HC** fausse;

Pas d'approche semblable menant à **HC** vraie

Conclusion

• Cas de $\mathrm{H}_1 \rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.

Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

• Cas de $\mathrm{H}_2 \rightsquigarrow$ Il existe au moins une approche (= des théorèmes !): celle de Woodin avec la Ω-logique, et elle mène à **HC** fausse;

Pas d'approche semblable menant à **HC** vraie

Pas de théorème justifiant «**HC** dépourvu de signification».

Conclusion

• Cas de $\mathrm{H}_1 \rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.

Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

• Cas de $\mathrm{H}_2 \rightsquigarrow$ Il existe au moins une approche (= des théorèmes !): celle de Woodin avec la Ω-logique, et elle mène à **HC** fausse;

Pas d'approche semblable menant à **HC** vraie

Pas de théorème justifiant «**HC** dépourvu de signification».

$\rightsquigarrow$ Ce que démontre Woodin: que **HC** a un sens.

W. Hugh Woodin; *The Continuum Hypothesis*, I & II; Not. Amer. Math. Soc.; **48–6** (2001) 567–576 & **8–7** (2001) 681–690.

P. Dehornoy; *Progrès récents sur l'hypothèse du continu (d'après Woodin)*, Séminaire Bourbaki, exposé 915, mars 2003.

$\rightsquigarrow$ http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy

Conclusion

• Cas de $\mathbf{H}_1$ $\rightsquigarrow$ L'axiome **DP** est vrai.

Comparer avec «Il existe un ensemble infini»

• Cas de $\mathbf{H}_2$ $\rightsquigarrow$ Il existe au moins une approche (= des théorèmes !): celle de Woodin avec la Ω-logique, et elle mène à **HC** fausse;

Pas d'approche semblable menant à **HC** vraie

Pas de théorème justifiant «**HC** dépourvu de signification».

$\rightsquigarrow$ Ce que démontre Woodin: que **HC** a un sens.

W. Hugh Woodin; *The Continuum Hypothesis*, I & II; Not. Amer. Math. Soc.; **48–6** (2001) 567–576 & **8–7** (2001) 681–690.

P. Dehornoy; *Progrès récents sur l'hypothèse du continu (d'après Woodin)*, Séminaire Bourbaki, exposé 915, mars 2003.

$\rightsquigarrow$ http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy