THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

- **But: Présenter quelques résultats de non-prouvabilité.**

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

- **But: Présenter quelques résultats de non-prouvabilité.**

- Comme souvent les résultats négatifs, techniquement difficiles;

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

- **But: Présenter quelques résultats de non-prouvabilité.**

- Comme souvent les résultats négatifs, techniquement difficiles;
  Résultats anciens: basés sur l'argument diagonal de Cantor;

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

- **But: Présenter quelques résultats de non-prouvabilité.**

- Comme souvent les résultats négatifs, techniquement difficiles;
  Résultats anciens: basés sur l'argument diagonal de Cantor;
  ... récents: basés sur les ordinaux et/ou la th. des modèles.

THEOREMES DE NON-PROUVABILITE

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme
Université de Caen

- **But: Présenter quelques résultats de non-prouvabilité.**

- Comme souvent les résultats négatifs, techniquement difficiles;
  Résultats anciens: basés sur l'argument diagonal de Cantor;
  ... récents: basés sur les ordinaux et/ou la th. des modèles.
- Ici: principalement en logique; mais aussi: non-existence
  de solution, bornes inférieures de complexité, etc.

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors il existe un énoncé arithmétique $\Phi_{\text{Gödel},S}$ vrai dans $(\mathbb{N},+,*)$ mais non prouvable à partir de S.

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors il existe un énoncé arithmétique $\Phi_{\text{Gödel},S}$ vrai dans $(\mathbb{N},+,*)$ mais non prouvable à partir de S.

- L'énoncé $\Phi_{\text{Gödel},S}$ exprime (code) la non-existence d'une formule qui soit équivalente à la S-prouvabilité de sa négation.

$\rightsquigarrow$ analogue au paradoxe du menteur

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors il existe un énoncé arithmétique $\Phi_{\text{Gödel},S}$ vrai dans $(\mathbb{N},+,*)$ mais non prouvable à partir de S.

- L'énoncé $\Phi_{\text{Gödel},S}$ exprime (code) la non-existence d'une formule qui soit équivalente à la S-prouvabilité de sa négation.

  $\rightsquigarrow$ analogue au paradoxe du menteur

- Repose sur l'arithmétisation de la logique

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors il existe un énoncé arithmétique $\Phi_{\text{Gödel},S}$ vrai dans $(\mathbb{N},+,*)$ mais non prouvable à partir de S.

- L'énoncé $\Phi_{\text{Gödel},S}$ exprime (code) la non-existence d'une formule qui soit équivalente à la S-prouvabilité de sa négation.

  $\rightsquigarrow$ analogue au paradoxe du menteur

- Repose sur l'arithmétisation de la logique et l'argument diagonal de Cantor.

- (Rosser, 1946) $\neg\Phi_{\text{Gödel},S}$ non plus prouvable à partir de S.

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\text{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\text{Gödel}, S}$

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence ($=$ non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathsf{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\text{Gödel},S}$ mais problèmes quand S est faible:

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathsf{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\text{Gödel},S}$ mais problèmes quand S est faible: facile pour ZF (théorie des ensembles),

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathrm{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\text{Gödel},S}$ mais problèmes quand S est faible:
  facile pour ZF (théorie des ensembles),
  difficile pour PA (arithmétique de Peano).

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence ($=$ non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathsf{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\mathsf{Gödel}, S}$ mais problèmes quand S est faible:
  facile pour ZF (théorie des ensembles),
  difficile pour PA (arithmétique de Peano).

$\rightsquigarrow$ Ruine tout espoir d'un système auto-certifié non trivial
(programme de Hilbert)

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathsf{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\text{Gödel}, S}$ mais problèmes quand S est faible:
  facile pour ZF (théorie des ensembles),
  difficile pour PA (arithmétique de Peano).

$\rightsquigarrow$ Ruine tout espoir d'un système auto-certifié non trivial (programme de Hilbert)

- Mais: énoncés éloignés de la pratique mathématique usuelle

Théorème (Gödel, 1930): Supposons que S est un système formel du premier ordre, récursivement énumérable, non contradictoire, et dans lequel l'arithmétique de Peano est représentable. Alors l'énoncé arithmétique Coh_S exprimant la cohérence (= non-contradiction) de S est vrai dans $(\mathbb{N}, +, *)$ mais non prouvable à partir de S.

- Repose sur $\mathsf{Coh}_S \Rightarrow \Phi_{\mathsf{Gödel},S}$ mais problèmes quand S est faible:
  facile pour ZF (théorie des ensembles),
  difficile pour PA (arithmétique de Peano).

$\rightsquigarrow$ Ruine tout espoir d'un système auto-certifié non trivial
(programme de Hilbert)

- Mais: énoncés éloignés de la pratique mathématique usuelle
  $\rightsquigarrow$ quête d'énoncés non prouvables plus naturels.

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**
  $\rightsquigarrow$ **tout ordinal a un successeur immédiat;**
  $\rightsquigarrow$ **tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure**

- **Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers:** $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- $\mathbf{0}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- 0 , 1

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\frown$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{}$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega{+}\mathbf{1}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega{+}\mathbf{1}$, $\omega{+}2$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\leadsto$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\leadsto$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega{+}1$, $\omega{+}2$, ..., $\omega.2$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega{+}1$, $\omega{+}2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega{+}\omega$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  - ⇝ tout ordinal a un successeur immédiat;
  - ⇝ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\frown$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega+\omega$,
  $\omega.\mathbf{2}+\mathbf{1}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+\mathbf{1}$, $\omega+2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega+\omega$,
  $\omega.\mathbf{2}+\mathbf{1}$, ..., $\omega.\mathbf{3}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  ⇝ tout ordinal a un successeur immédiat;
  ⇝ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., ω^2

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  - $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  - $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+\mathbf{1}$, $\omega+2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega+\omega$,
  $\omega.\mathbf{2}+\mathbf{1}$, ..., $\omega.\mathbf{3}$, ..., $\omega^{\mathbf{2}} = \omega.\omega$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega{+}\mathbf{1}$, $\omega{+}2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega{+}\omega$,
  $\omega.\mathbf{2}{+}\mathbf{1}$, ..., $\omega.\mathbf{3}$, ..., $\omega^{\mathbf{2}} = \omega.\omega$, $\omega^{\mathbf{2}}{+}\mathbf{1}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- 0 , 1 , 2 , ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- 0 , 1 , 2 , ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels
- Munie d'un bon ordre
  - ⇝ tout ordinal a un successeur immédiat;
  - ⇝ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure
- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$
- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3 ,
  ω^ω

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**
  $\rightsquigarrow$ **tout ordinal a un successeur immédiat;**
  $\rightsquigarrow$ **tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure**

- **Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers:** $+$, $*$, $\widehat{}$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+\mathbf{1}$, $\omega+2$, ..., $\omega.\mathbf{2} = \omega+\omega$,
  $\omega.\mathbf{2}+\mathbf{1}$, ..., $\omega.\mathbf{3}$, ..., $\omega^{\mathbf{2}} = \omega.\omega$, $\omega^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}$, ..., $\omega^{\mathbf{2}}+\omega$, ..., $\omega^{\mathbf{3}}$,
  ω^{ω} , ..., $\omega^{\omega^{\omega}}$

- Suite des ordinaux (Cantor):
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- Munie d'un bon ordre
  $\rightsquigarrow$ tout ordinal a un successeur immédiat;
  $\rightsquigarrow$ tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure

- Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers: $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- 0 , 1 , 2 , ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3 ,
  ω^ω , ..., ω^{ω^ω} , ..., $\varepsilon_0 = \sup(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots)$

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**
  $\rightsquigarrow$ **tout ordinal a un successeur immédiat;**
  $\rightsquigarrow$ **tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure**

- **Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers:** $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- 0 , 1 , 2 , ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3 ,
  ω^ω , ..., ω^{ω^ω} , ..., $\varepsilon_0 = \sup(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots)$, ...,
  ω_1
  $\uparrow$
  plus petit non dénombrable

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**
  $\rightsquigarrow$ **tout ordinal a un successeur immédiat;**
  $\rightsquigarrow$ **tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure**

- **Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers:** $+$, $*$, $\hat{}$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3 ,
  ω^ω , ..., ω^{ω^ω} , ..., $\varepsilon_0 = \sup(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots)$, ...,
  ω_1 , ..., ω_2
  $\uparrow$
plus petit non dénombrable

- **Suite des ordinaux (Cantor):**
  prolongement transfini de la suite des entiers naturels

- **Munie d'un bon ordre**
  $\rightsquigarrow$ **tout ordinal a un successeur immédiat;**
  $\rightsquigarrow$ **tout ensemble d'ordinaux a une borne supérieure**

- **Munie d'une arithmétique qui étend celle des entiers:** $+$, $*$, $\widehat{\ }$

- $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, ..., ω , $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega.2 = \omega+\omega$,
  $\omega.2+1$, ..., $\omega.3$, ..., $\omega^2 = \omega.\omega$, ω^2+1 , ..., $\omega^2+\omega$, ..., ω^3 ,
  ω^ω , ..., ω^{ω^ω} , ..., $\varepsilon_0 = \sup(\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots)$, ...,
  ω_1 , ..., ω_2 , ...

plus petit non dénombrable **pas un ensemble**

- **Principe d'induction** **pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:**

  $$\mathbf{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$

- **Principe d'induction pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:**
  $$\mathbf{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$
- **Soit** $\Phi_{\mathrm{Gentzen}} := \forall\phi\forall\alpha < \varepsilon_0(\mathbf{Ind}_{\phi,\theta})$

- **Principe d'induction** pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:

  $$\mathbf{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$

- Soit $\Phi_{\text{Gentzen}} := \forall\phi\forall\alpha < \varepsilon_0(\mathbf{Ind}_{\phi,\theta})$

- Codage des formules et des ordinaux $< \varepsilon_0$ par des entiers

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} (est) un énoncé arithmétique

- **Principe d'induction** pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:

  $$\mathbf{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$

- Soit $\Phi_{\mathsf{Gentzen}} := \forall\phi\forall\alpha < \varepsilon_0(\mathbf{Ind}_{\phi,\theta})$

- Codage des formules et des ordinaux $< \varepsilon_0$ par des entiers

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} (est) un énoncé arithmétique

- La famille des ordinaux $< \varepsilon_0$ est bien ordonnée

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} est vrai (= prouvable à partir de ZF)

- **Principe d'induction** pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:

  $$\mathrm{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$

- Soit $\Phi_{\text{Gentzen}} := \forall\phi\forall\alpha < \varepsilon_0(\mathrm{Ind}_{\phi,\theta})$

- Codage des formules et des ordinaux $< \varepsilon_0$ par des entiers

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} (est) un énoncé arithmétique

- La famille des ordinaux $< \varepsilon_0$ est bien ordonnée

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} est vrai (= prouvable à partir de ZF)

Théorème (Gentzen, 1936): Φ_{Gentzen} entraîne $\mathrm{Coh}_{\mathrm{PA}}$.

- **Principe d'induction** pour une formule ϕ jusqu'à l'ordinal θ:

  $$\mathbf{Ind}_{\phi,\theta} := \forall\alpha < \theta(\forall\beta < \alpha(\phi(\beta) \Rightarrow \phi(\alpha))) \Rightarrow \forall\alpha < \theta(\phi(\alpha))$$

- Soit $\Phi_{\text{Gentzen}} := \forall\phi\forall\alpha < \varepsilon_0(\mathbf{Ind}_{\phi,\theta})$

- Codage des formules et des ordinaux $< \varepsilon_0$ par des entiers

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} (est) un énoncé arithmétique

- La famille des ordinaux $< \varepsilon_0$ est bien ordonnée

  $\rightsquigarrow$ Φ_{Gentzen} est vrai (= prouvable à partir de ZF)

Théorème (Gentzen, 1936): Φ_{Gentzen} entraîne $\mathrm{Coh}_{\mathrm{PA}}$.

Corollaire: Φ_{Gentzen} est vrai mais non prouvable à partir de PA.

- Φ_{Gentzen} met en jeu des sous-ensembles quelconques de ε_0

$\rightsquigarrow$ $\approx$ équivalent à:
"Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0".

• Φ_{Gentzen} met en jeu des sous-ensembles quelconques de ε_0
$\rightsquigarrow$ $\approx$ équivalent à:
"Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0".

• $\Phi_{\text{Kreisel}} :=$ "Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0 qui soit primitive récursive".

- Φ_{Gentzen} met en jeu des sous-ensembles quelconques de ε_0

$\rightsquigarrow$ $\approx$ équivalent à:

"Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0".

- $\Phi_{\text{Kreisel}} :=$ "Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0 qui soit primitive récursive".

$\uparrow$

simple $\rightsquigarrow$ Φ_{Kreisel} plus faible que Φ_{Gentzen}

- Φ_{Gentzen} met en jeu des sous-ensembles quelconques de ε_0

$\rightsquigarrow$ $\approx$ équivalent à:
"Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0".

- $\Phi_{\text{Kreisel}} :=$ "Il n'existe pas de suite strictement décroissante de $\mathbb{N}$ dans ε_0 qui soit primitive récursive".

$\uparrow$
simple $\rightsquigarrow$ Φ_{Kreisel} plus faible que Φ_{Gentzen}

Théorème (Kreisel, ~1965): Φ_{Kreisel} est vrai mais non prouvable à partir de PA.

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m,

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m, il existe un (grand) entier N tel que:

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m, il existe un (grand) entier N tel que:

pour toute $f : \{1, ..., N\}^{[d]} \to \{1, ..., c\}$, il existe $H \subseteq \{1, ..., N\}$ t.q.

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m, il existe un (grand) entier N tel que:

pour toute $f : \{1, ..., N\}^{[d]} \to \{1, ..., c\}$, il existe $H \subseteq \{1, ..., N\}$ t.q.

card$(H) \geqslant m$ et f est constante sur H^d.

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m,
il existe un (grand) entier N tel que:
pour toute $f : \{1, ..., N\}^{[d]} \to \{1, ..., c\}$, il existe $H \subseteq \{1, ..., N\}$ t.q.
card$(H) \geqslant m$ et f est constante sur H^d.

$\rightsquigarrow$ Tout graphe à 6 sommets inclut un triangle ou un anti-triangle.

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m,
il existe un (grand) entier N tel que:
pour toute $f : \{1, ..., N\}^{[d]} \to \{1, ..., c\}$, il existe $H \subseteq \{1, ..., N\}$ t.q.
$\mathrm{card}(H) \geqslant m$ et f est constante sur H^d.

⇝ Tout graphe à 6 sommets inclut un triangle ou un anti-triangle.

- Variante $\Phi_{\text{Paris-Harrington}}$:
  Quels que soient... il existe... pour toute... il existe... t.q.
  $\mathrm{card}(H) \geqslant m$ et $\mathrm{card}(H) > \inf(H)$ et f est constante sur H^d.

Théorème (Ramsey, 1930): Quels que soient les entiers d, c, m, il existe un (grand) entier N tel que:
pour toute $f : \{1, ..., N\}^{[d]} \to \{1, ..., c\}$, il existe $H \subseteq \{1, ..., N\}$ t.q.
card$(H) \geqslant m$ et f est constante sur H^d.

⇝ Tout graphe à 6 sommets inclut un triangle ou un anti-triangle.

- Variante $\Phi_{\text{Paris-Harrington}}$:
  Quels que soient... il existe... pour toute... il existe... t.q.
  card$(H) \geqslant m$ et card$(H) >$ inf(H) et f est constante sur H^d.

Théorème (Paris-Harrington, 1977): $\Phi_{\text{Paris-Harrington}}$ est vrai mais non prouvable à partir de PA.

- **Ecriture d'un entier en base p:**

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$**.**

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$**.**

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$**.**

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

  $\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$.

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$.

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

  $\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- **Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.**

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$.

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

  $\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- **Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.**

  $\rightsquigarrow$ **Ex.:** $F_{2,3}(26)$

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$**.**

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

  $\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$**.**

- **Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.**

  $\rightsquigarrow$ **Ex.:** $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1)$

- **Ecriture d'un entier en base p:**
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ **avec** $c_m, ..., c_1 < p$ **et** $e_m > ... > e_1$.

- **Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:**

  $\rightsquigarrow$ **Exemple:** $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- **Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.**

  $\rightsquigarrow$ **Ex.:** $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3^1$

- Ecriture d'un entier en base p:
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ avec $c_m, ..., c_1 < p$ et $e_m > ... > e_1$.

- Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:

  $\rightsquigarrow$ Exemple: $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3^1 \approx 9.10^9$.

- Ecriture d'un entier en base p:
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ avec $c_m, ..., c_1 < p$ et $e_m > ... > e_1$.

- Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:

  $\rightsquigarrow$ Exemple: $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3^1 \approx 9.10^9$.

- Suite de Goodstein de départ d: suite récurrente $g_{d,2}, g_{d,3}, ...$ t.q.
  $g_{d,2} := d$ et $g_{d,p+1} := F_{p,p+1}(g_{d,p}) - 1$.

- Ecriture d'un entier en base p:
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ avec $c_m, ..., c_1 < p$ et $e_m > ... > e_1$.

- Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:

  $\rightsquigarrow$ Exemple: $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3^1 \approx 9.10^9$.

- Suite de Goodstein de départ d: suite récurrente $g_{d,2}, g_{d,3}, ...$ t.q.

  $$g_{d,2} := d \quad \text{et} \quad g_{d,p+1} := F_{p,p+1}(g_{d,p}) - 1.$$

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $g_{26,2} = 26$, $g_{26,3} \approx 9.10^9$, etc.

- Ecriture d'un entier en base p:
  $n = c_m.p^{e_m} + ... + c_1.p^{e_1}$ avec $c_m, ..., c_1 < p$ et $e_m > ... > e_1$.

- Ecriture en base p itérée: exposants aussi en base p et itérer:

  $\rightsquigarrow$ Exemple: $26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1$.

- Pour $p < q$ et n entiers, $F_{p,q}(n) :=$ résultat du remplacement de p par q dans l'écriture de n en base p itérée.

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $F_{2,3}(26) = F_{2,3}(2^{2^2}+2^{2^1+1}+2^1) = 3^{3^3}+3^{3^1+1}+3^1 \approx 9.10^9$.

- Suite de Goodstein de départ d: suite récurrente $g_{d,2}, g_{d,3}, ...$ t.q.
  $g_{d,2} := d$ et $g_{d,p+1} := F_{p,p+1}(g_{d,p}) - 1$.

  $\rightsquigarrow$ Ex.: $g_{26,2} = 26$, $g_{26,3} \approx 9.10^9$, etc. —tend (très) vite vers ∞

- **Et pourtant...**

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- Et pourtant...

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- Démonstration: Utiliser les ordinaux.

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26)$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1)$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$g_{d,2}$ $g_{d,3}$ $g_{d,4}$ ...

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$g_{d,2} \xrightarrow{F_{2,3}} \bullet \xrightarrow{-1} g_{d,3}$ $\qquad g_{d,4} \qquad \ldots$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

\- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$g_{d,2} \xrightarrow{F_{2,3}} \bullet \xrightarrow{-1} g_{d,3} \xrightarrow{F_{3,4}} \bullet \xrightarrow{-1} g_{d,4} \quad \ldots$$

- Et pourtant...

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- Démonstration: Utiliser les ordinaux.

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2}+2^{2^1+1}+2^1) = \omega^{\omega^\omega}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^1$.

$$g_{d,2} \xrightarrow{F_{2,3}} \bullet \xrightarrow{-1} g_{d,3} \xrightarrow{F_{3,4}} \bullet \xrightarrow{-1} g_{d,4} \xrightarrow{F_{4,5}} \bullet \xrightarrow{-1} \ldots$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

\- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"'] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & \dots
\end{tikzcd}
$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"'] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"'] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"'] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

- **Et pourtant…**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

\- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2}+2^{2^1+1}+2^1) = \omega^{\omega^\omega}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^1$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

\- $F_{p,\omega}(n) :=$ **remplacer p par ω dans le développement de n**

$\rightsquigarrow$ **Exemple:** $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"'] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"'] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"'] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration:** Utiliser les ordinaux.

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

  $\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \dots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

\- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2}+2^{2^1+1}+2^1) = \omega^{\omega^\omega}+\omega^{\omega^1+1}+\omega^1$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"'] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"'] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"'] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"'] \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration: Utiliser les ordinaux.**

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

- **Et pourtant...**

Théorème (Goodstein, 1942): Quelle que soit le départ d, il existe un (grand) entier N t.q. $g_{d,N} = 0$.

- **Démonstration:** Utiliser les ordinaux.

- $F_{p,\omega}(n) :=$ remplacer p par ω dans le développement de n

$\rightsquigarrow$ Exemple: $F_{2,\omega}(26) = F_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2^1) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^1+1} + \omega^1$.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \bullet \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[r, phantom, ">"] & \cdots \\
g_{d,2} \arrow[u, "F_{2,\omega}"] \arrow[r, "F_{2,3}"] & \bullet \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,3} \arrow[u, "F_{3,\omega}"] \arrow[r, "F_{3,4}"] & \bullet \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & g_{d,4} \arrow[u, "F_{4,\omega}"] \arrow[r, "F_{4,5}"] & \bullet \arrow[u, "F_{5,\omega}"] \arrow[r, "-1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Théorème (Kirby-Paris, 1982): Le théorème de Goodstein est un énoncé d'arithmétique vrai mais non prouvable dans PA.

- Démonstration (Cichon): Utilise la hiérarchie de Hardy des fonctions rapidement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; La fonction de Goodstein croît plus vite que toute fonction dont l'existence peut être prouvée dans PA.

... Résultats de H.Friedman: non-démontrabilité dans ZF ...

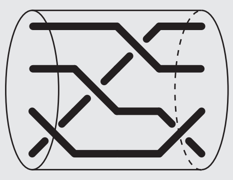
- **Un diagramme de tresse à 4 brins:**

- **Un diagramme de tresse à 4 brins:**

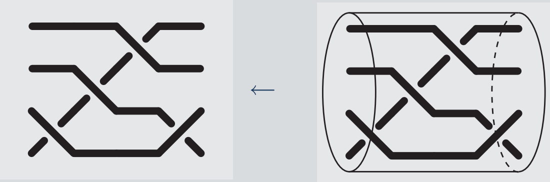
- **Un** diagramme de tresse **à** 4 **brins:** $=$ **projection 2D de :**

- **Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :**

$\longleftarrow$

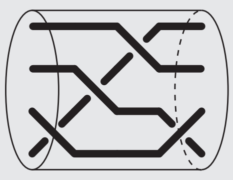


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

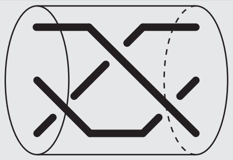


- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

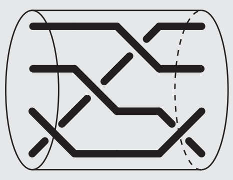
 $\longleftarrow$ 

- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

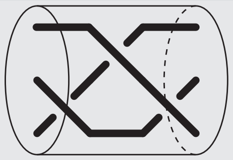


- **Un** diagramme de tresse **à** 4 **brins: = projection 2D de :**

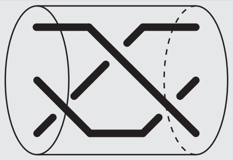
←



- isotopie **= bouger les brins en laissant les bouts fixes:**

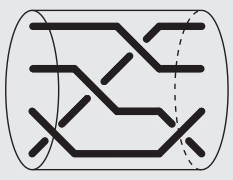


isotope à

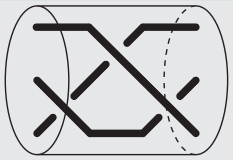


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

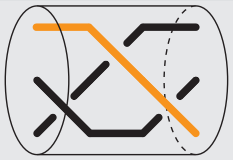
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

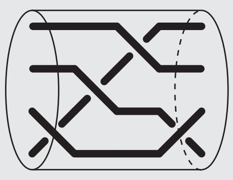


isotope à

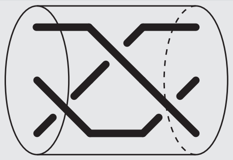


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

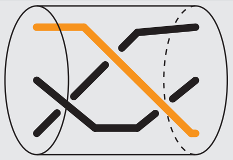
$\longleftarrow$



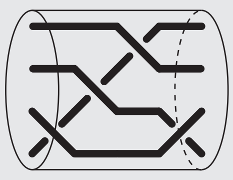
- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:



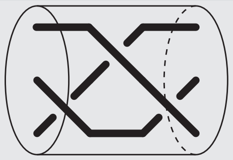
isotope à



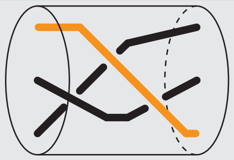
- Un diagramme de tresse à 4 brins: = projection 2D de :



- isotopie = bouger les brins en laissant les bouts fixes:

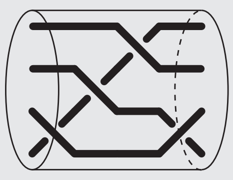


isotope à

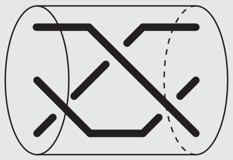


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

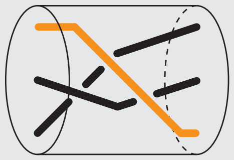
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

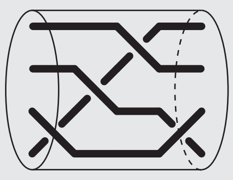


isotope à

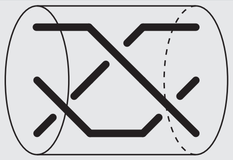


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

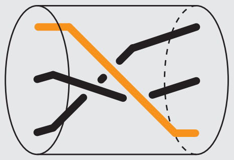
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

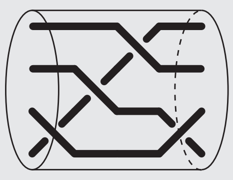


isotope à

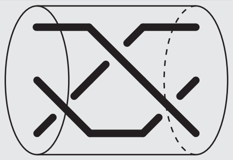


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

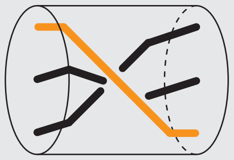
$\longleftarrow$



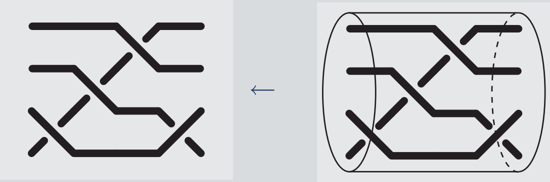
- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:



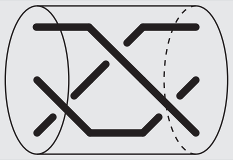
isotope à



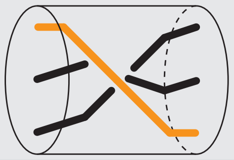
- Un diagramme de tresse à 4 brins: = projection 2D de :



- isotopie = bouger les brins en laissant les bouts fixes:

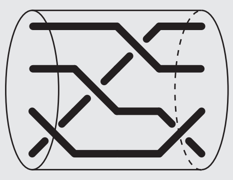


isotope à

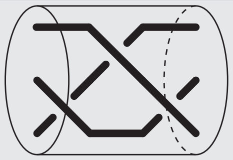


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

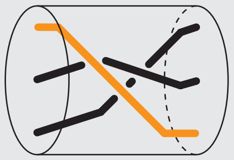
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

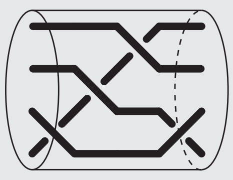


isotope à

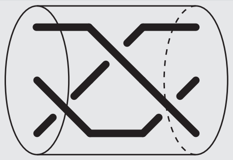


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

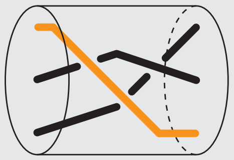
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

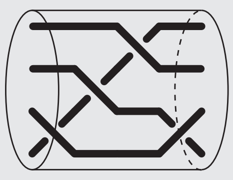


isotope à

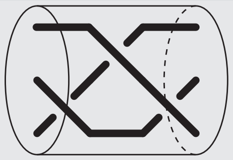


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

$\longleftarrow$



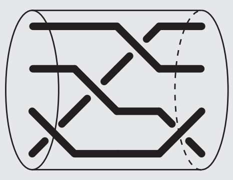
- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:



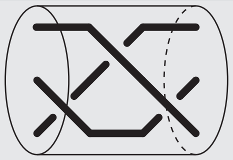
isotope à

- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

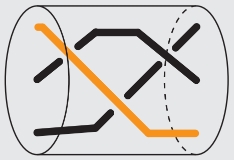
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

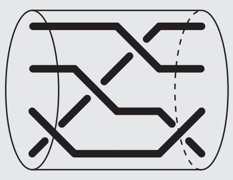


isotope à

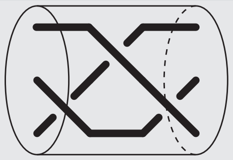


- **Un** diagramme de tresse **à** 4 **brins:** **$=$ projection 2D de :**

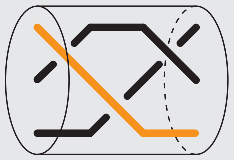
$\longleftarrow$



- isotopie **$=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:**

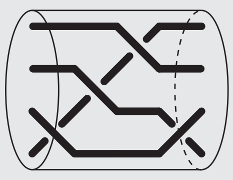


isotope à

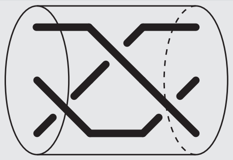


- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

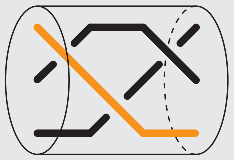
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:



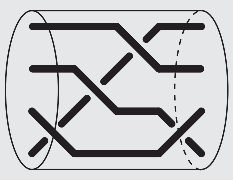
isotope à



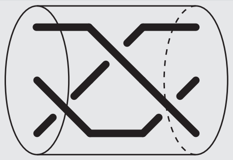
- tresse := classe d'isotopie $\rightsquigarrow$ représentée par diagramme,

- Un diagramme de tresse à 4 brins: $=$ projection 2D de :

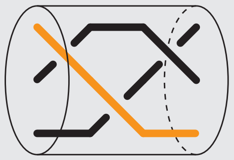
$\longleftarrow$



- isotopie $=$ bouger les brins en laissant les bouts fixes:

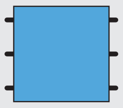


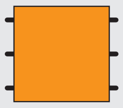
isotope à



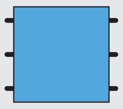
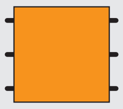
- tresse $:=$ classe d'isotopie $\rightsquigarrow$ représentée par diagramme,
  mais des diagrammes différents peuvent donner la même tresse.

- **Produit** de deux tresses:

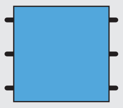
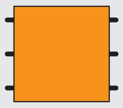
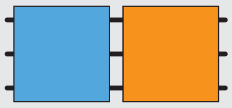




- **Produit** de deux tresses:

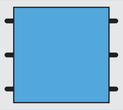
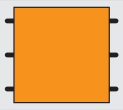
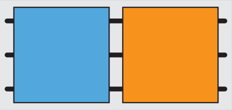
 $*$  $:=$

- **Produit de deux tresses:**

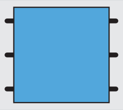
 $*$  $:=$ 

Les groupes de tresses

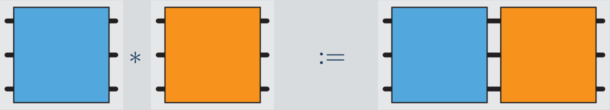
- Produit de deux tresses:

 $*$  $:=$ 

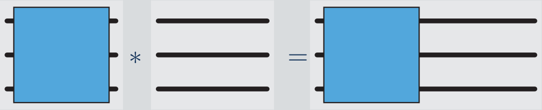
- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

 $*$  $=$

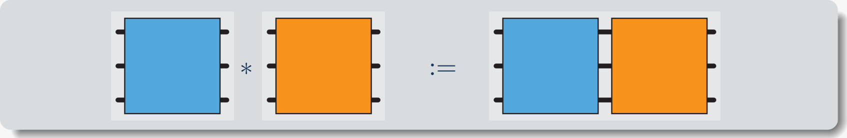
- **Produit** de deux tresses:



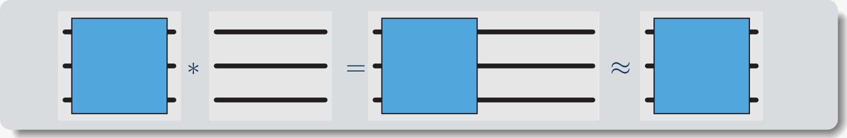
- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:



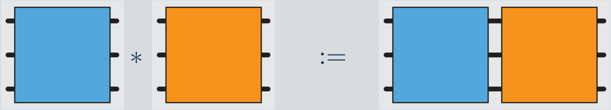
- **Produit de deux tresses:**



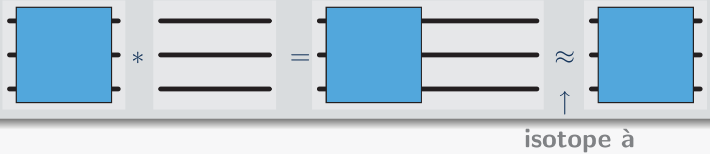
- **Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:**



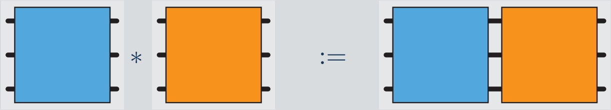
- **Produit de deux tresses:**



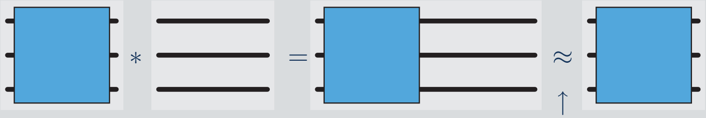
- **Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:**



- **Produit** de deux tresses:

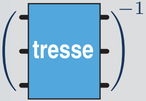


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

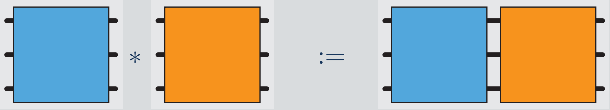


isotope à

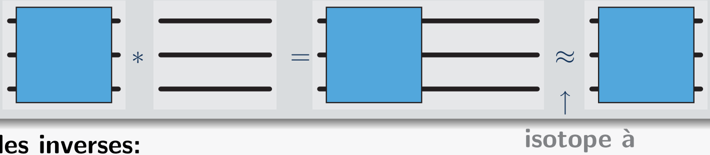
et des inverses:



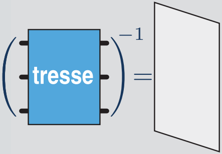
- **Produit** de deux tresses:



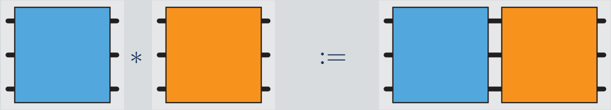
- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:



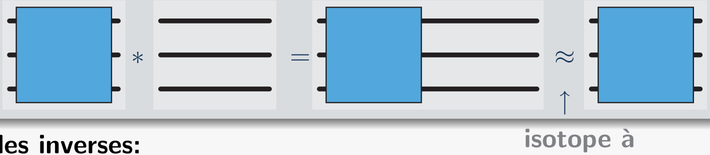
et des inverses:



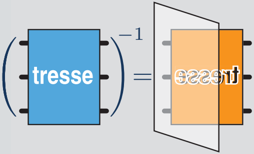
- **Produit** de deux tresses:



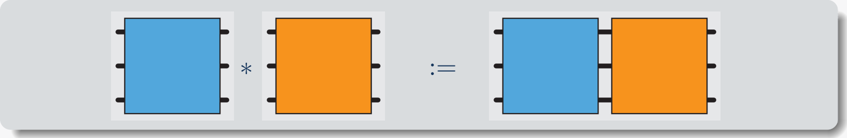
- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:



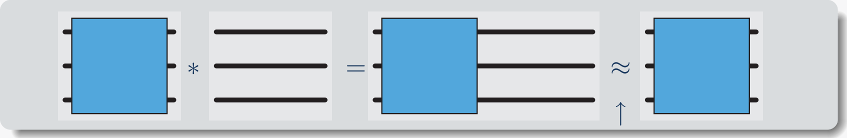
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

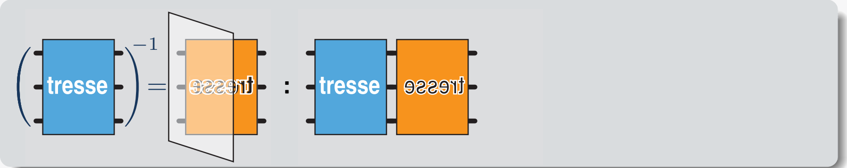


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

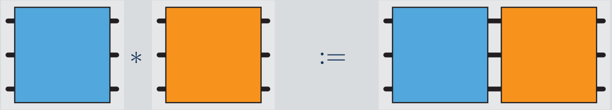


isotope à

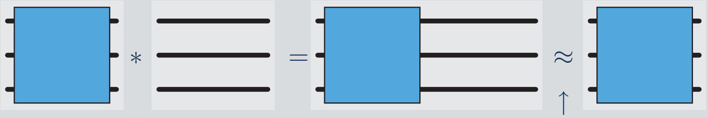
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

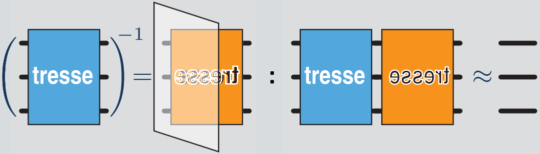


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

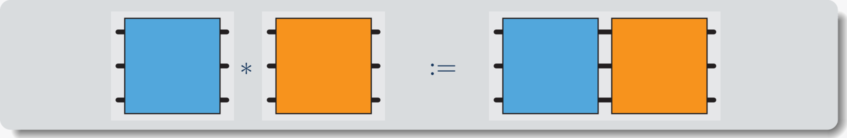


isotope à

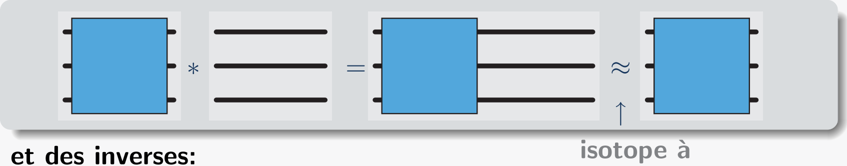
et des inverses:



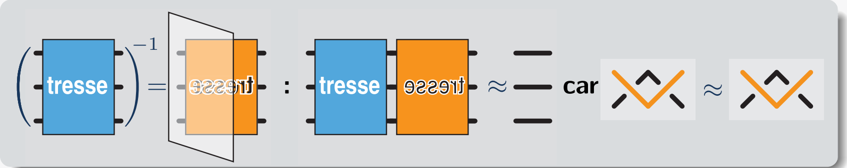
- **Produit** de deux tresses:



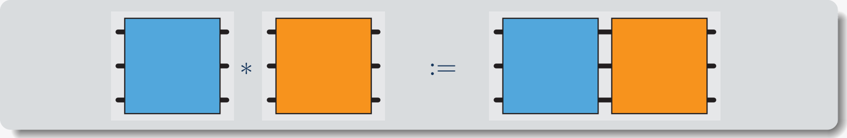
- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:



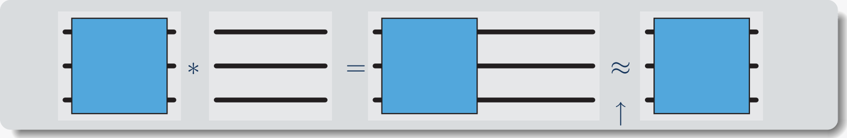
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

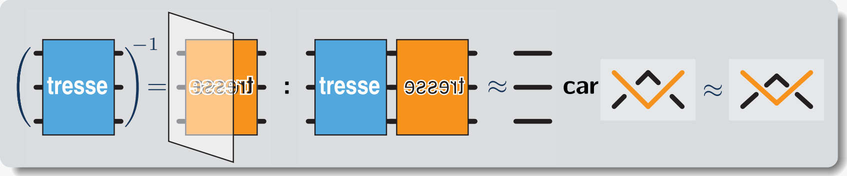


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

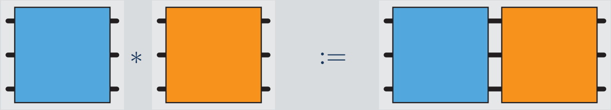


isotope à

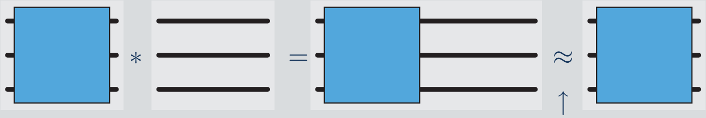
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

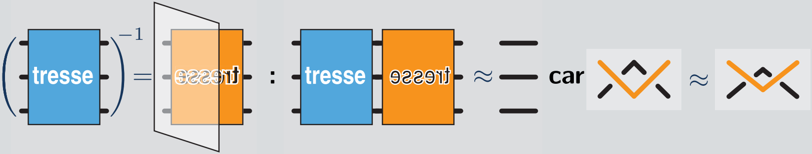


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

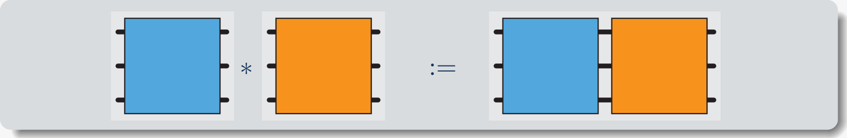


isotope à

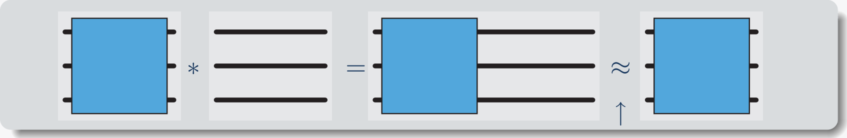
et des inverses:



- **Produit de deux tresses:**

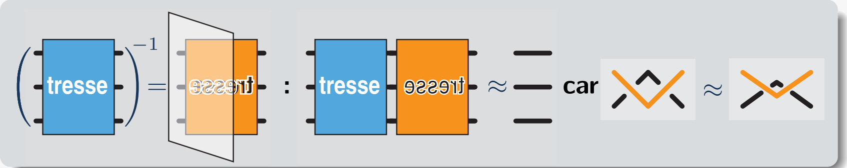


- **Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:**

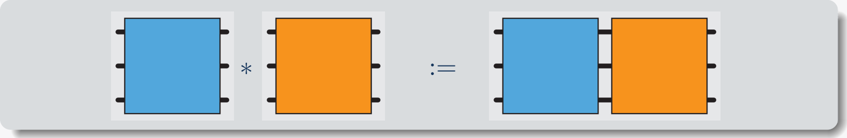


isotope à

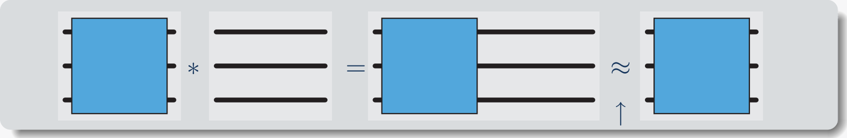
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

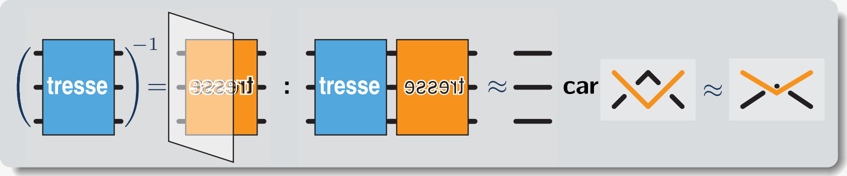


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

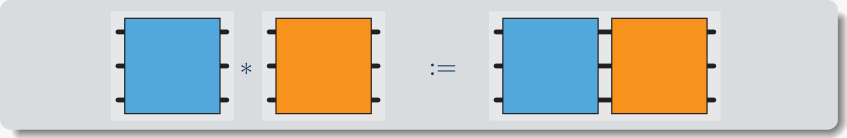


isotope à

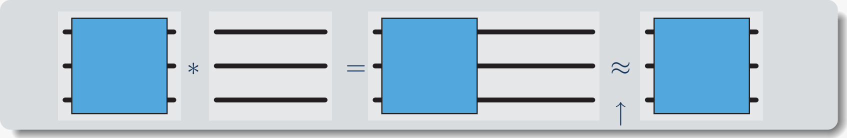
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

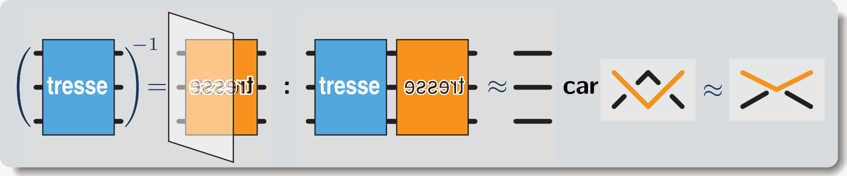


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

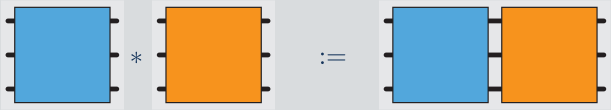


isotope à

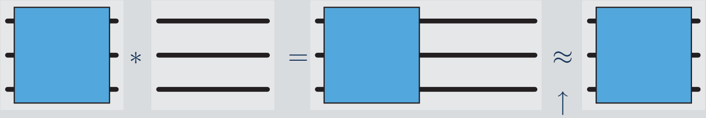
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

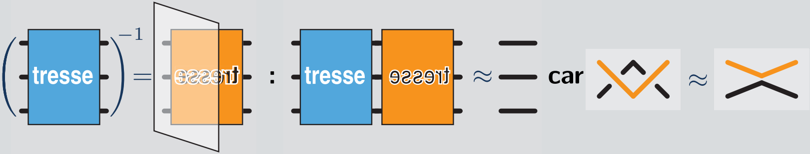


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

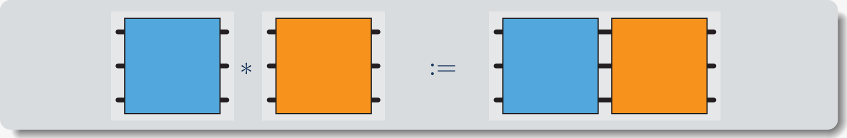


isotope à

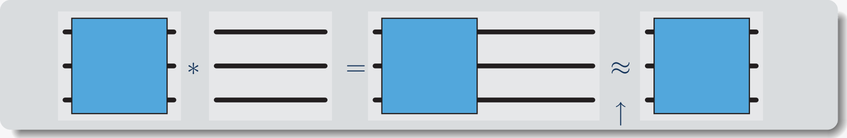
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

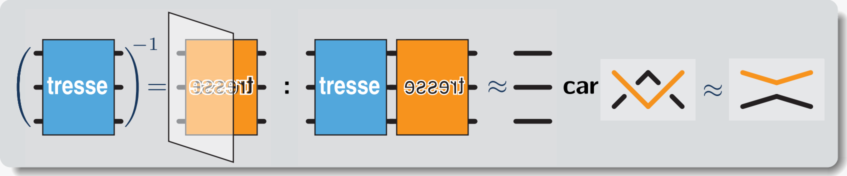


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

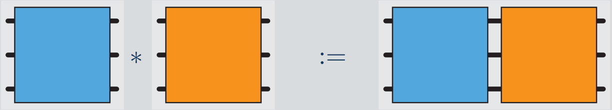


isotope à

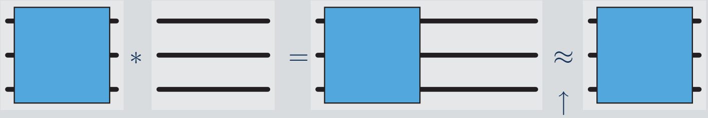
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

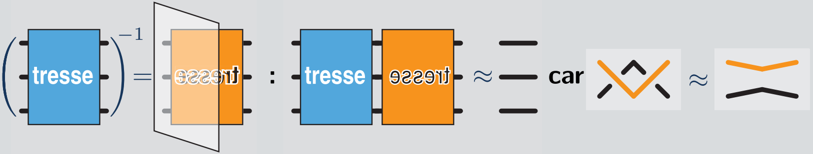


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

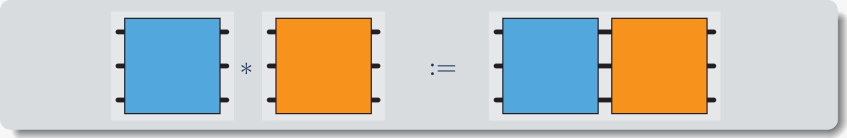


isotope à

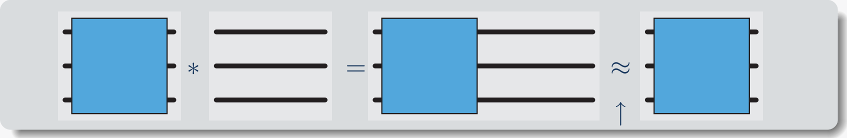
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

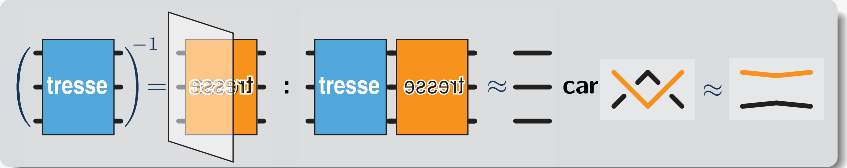


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

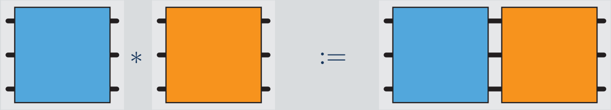


isotope à

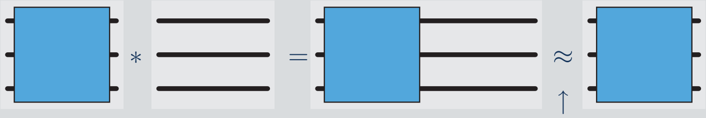
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

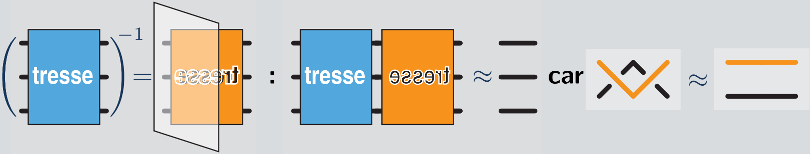


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:

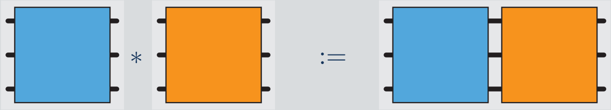


isotope à

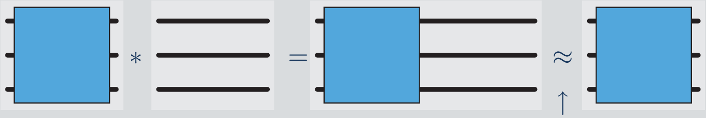
et des inverses:



- **Produit** de deux tresses:

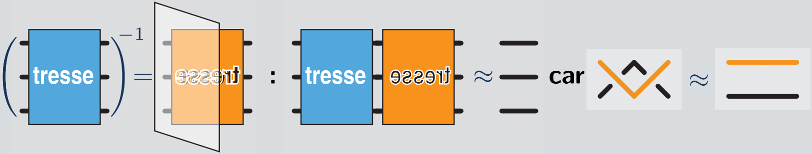


- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre:



isotope à

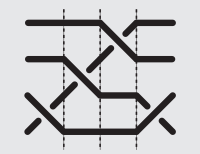
et des inverses:



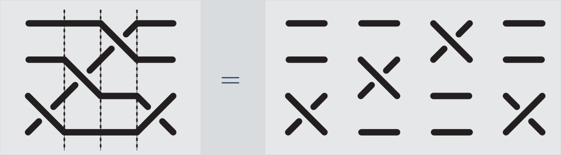
⇝ Pour chaque n, groupe B_n des tresses à n brins (E.Artin, 1925).

- **Générateurs d'Artin de B_n:**

- **Générateurs d'Artin de B_n:**

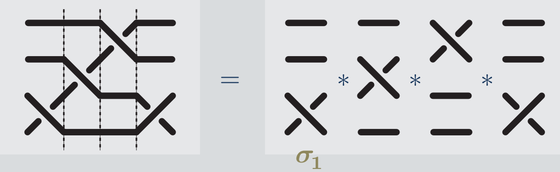


- **Générateurs d'Artin de B_n:**

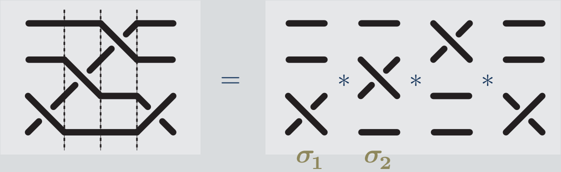


- **Générateurs d'Artin de B_n:**

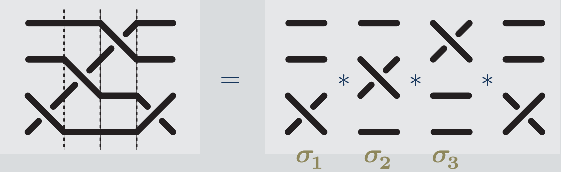
- **Générateurs d'Artin de B_n:**



- **Générateurs d'Artin de B_n:**

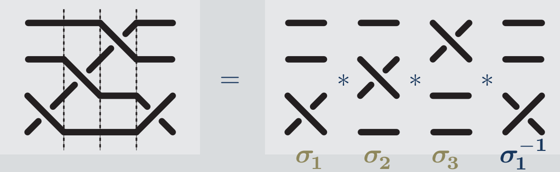


- **Générateurs d'Artin de B_n:**



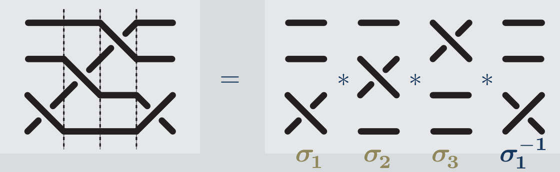
Présentation d'Artin de B_n

- **Générateurs d'Artin de B_n:**



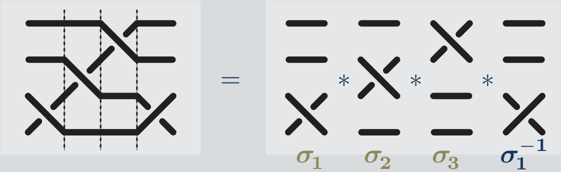
Présentation d'Artin de B_n

- **Générateurs d'Artin de B_n:**



- **Théorème (Artin): Le groupe B_n est engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$,**

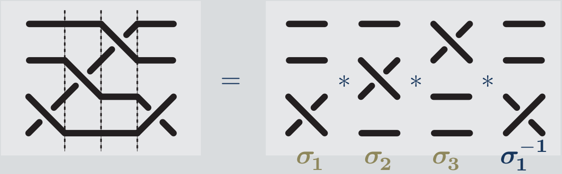
- **Générateurs d'Artin de B_n:**



- **Théorème (Artin):** Le groupe B_n est engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, soumis à $\left\{ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \right.$ pour $|i-j| = 1$,

Présentation d'Artin de B_n

- **Générateurs d'Artin de B_n:**



- **Théorème (Artin): Le groupe B_n est engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$, soumis à**

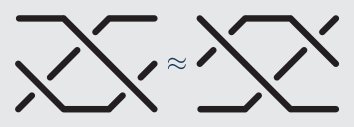
$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2. \end{cases}$$

- **Générateurs d'Artin de B_n:**

$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_1^{-1}$

- **Théorème (Artin): Le groupe B_n est engendré par $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$, soumis à**

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2. \end{cases}$$



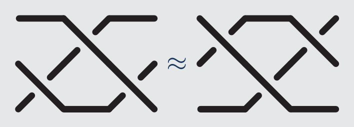
$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_1 \qquad \sigma_2 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2$

- **Générateurs d'Artin de B_n:**

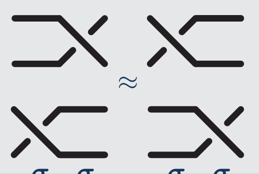
$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_1^{-1}$

- **Théorème (Artin):** Le groupe B_n est engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$,

  soumis à $\begin{cases} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2. \end{cases}$



$\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_1 \qquad \sigma_2 \; \sigma_1 \; \sigma_2$



$\sigma_1 \; \sigma_3 \qquad \sigma_3 \; \sigma_1$

Travail en cours avec L.Carlucci, et A.Weiermann

- **But: Construire de (très) longues suites de tresses
  à l'aide d'une règle inductive simple (cf. suites de Goodstein)**

Travail en cours avec L.Carlucci, et A.Weiermann

- **But:** Construire de (très) longues suites de tresses
  à l'aide d'une règle inductive simple (cf. suites de Goodstein)

- **Principe:** Bataille contre une tresse: éliminer les croisements;
  à l'étape t, on retire 1 croisement,
  mais t nouveaux croisements réapparaissent (en général).

Travail en cours avec L.Carlucci, et A.Weiermann

- **But: Construire de (très) longues suites de tresses**
  à l'aide d'une règle inductive simple (cf. suites de Goodstein)

- **Principe: Bataille contre une tresse: éliminer les croisements;**
  à l'étape t, on retire 1 croisement,
  mais t nouveaux croisements réapparaissent (en général).

- **Ici en version 3 brins—mais existe pour tout n.**

- **(Burckel) Forme alternante pour une tresse positive à 3 brins:**

$\boldsymbol{\sigma_{[p]}^{e_p} \ldots \sigma_2^{e_2}\sigma_1^{e_1}}$ **avec** $\boldsymbol{e_p \geqslant 1}$, $\boldsymbol{e_{p-1} \geqslant 2}$, **...,** $\boldsymbol{e_3 \geqslant 2}$, $\boldsymbol{e_2 \geqslant 1}$, $\boldsymbol{e_1 \geqslant 0}$,

1 **ou** 2 **suivant la parité de** p

- **(Burckel) Forme alternante pour une tresse positive à 3 brins:**

$\sigma_{[p]}^{e_p} \ldots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$ **avec** $e_p \geqslant 1$, $e_{p-1} \geqslant 2$, ..., $e_3 \geqslant 2$, $e_2 \geqslant 1$, $e_1 \geqslant 0$,

1 **ou** 2 **suivant la parité de** p

- **Bloc critique: le plus à droite dont la taille e_k est strictement plus grande que la valeur minimale, s'il existe, le bloc gauche sinon.**

- (Burckel) Forme alternante pour une tresse positive à 3 brins:

$\sigma_{[p]}^{e_p} \dots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$ avec $e_p \geqslant 1$, $e_{p-1} \geqslant 2$, ..., $e_3 \geqslant 2$, $e_2 \geqslant 1$, $e_1 \geqslant 0$,

1 ou 2 suivant la parité de p

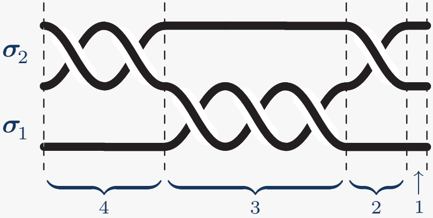
- Bloc critique: le plus à droite dont la taille e_k est strictement plus grande que la valeur minimale, s'il existe, le bloc gauche sinon.

- (Burckel) Forme alternante pour une tresse positive à 3 brins:

$\sigma_{[p]}^{e_p} \dots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$ avec $e_p \geqslant 1$, $e_{p-1} \geqslant 2$, ..., $e_3 \geqslant 2$, $e_2 \geqslant 1$, $e_1 \geqslant 0$,

1 ou 2 suivant la parité de p

- Bloc critique: le plus à droite dont la taille e_k est strictement plus grande que la valeur minimale, s'il existe, le bloc gauche sinon.

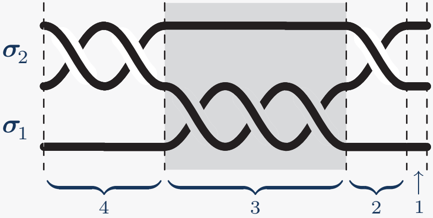


- (Burckel) Forme alternante pour une tresse positive à 3 brins:

$\sigma_{[p]}^{e_p} \dots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$ avec $e_p \geqslant 1$, $e_{p-1} \geqslant 2$, ..., $e_3 \geqslant 2$, $e_2 \geqslant 1$, $e_1 \geqslant 0$,

1 ou 2 suivant la parité de p

- Bloc critique: le plus à droite dont la taille e_k est strictement plus grande que la valeur minimale, s'il existe, le bloc gauche sinon.



- **La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à $\mathbf{3}$ brins b:**

- **La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:**

  - **Partir de la forme alternante de b;**

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;

- **La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:**

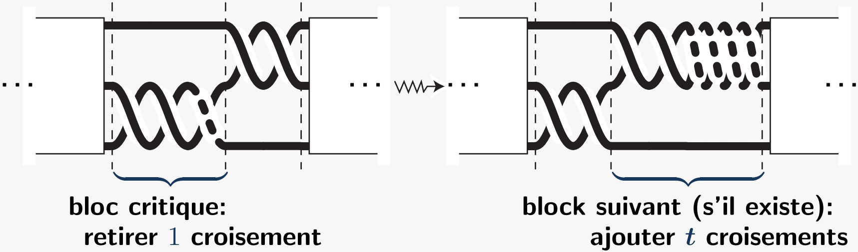
  - **Partir de la forme alternante de b;**
  - **A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;**
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;

- **La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:**

- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.

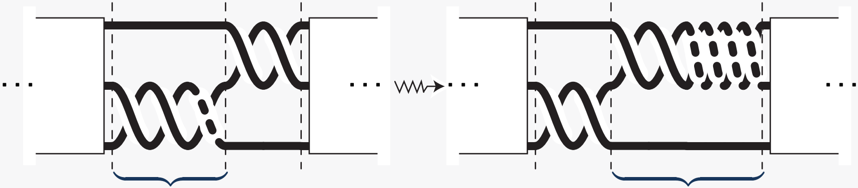
- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



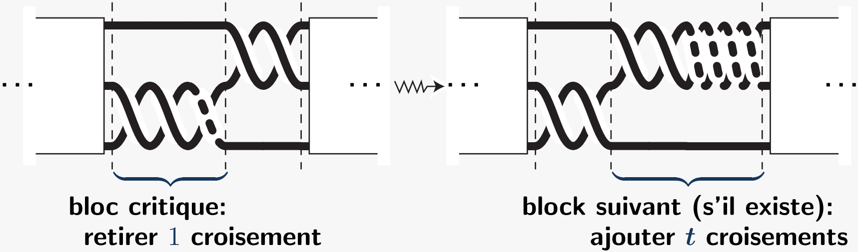
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

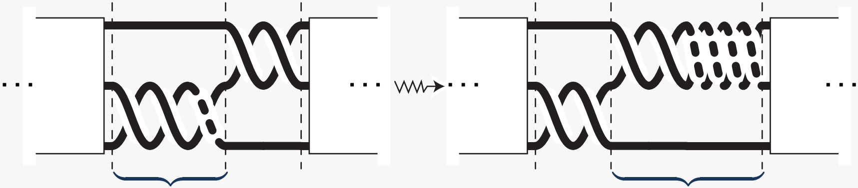
- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



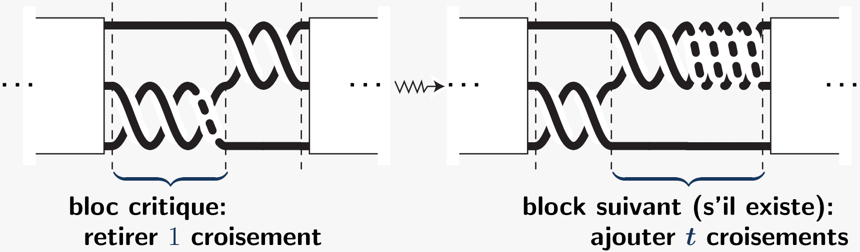
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

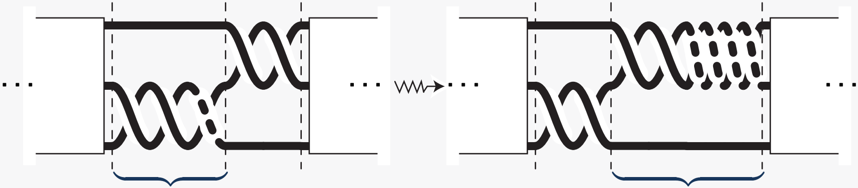
- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



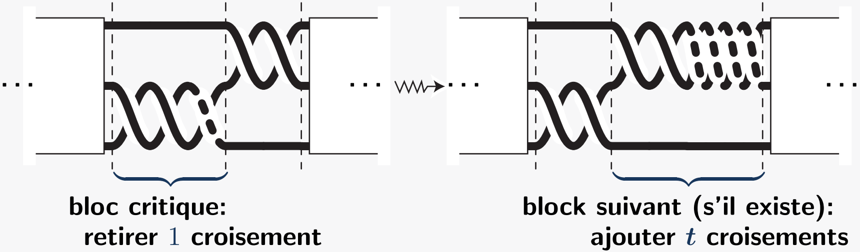
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

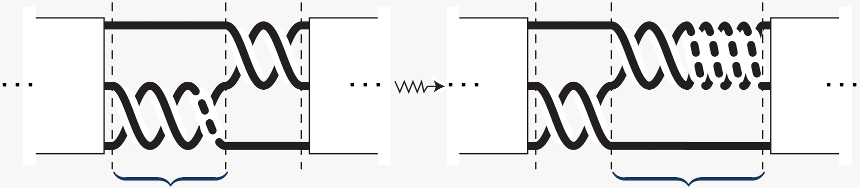
- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



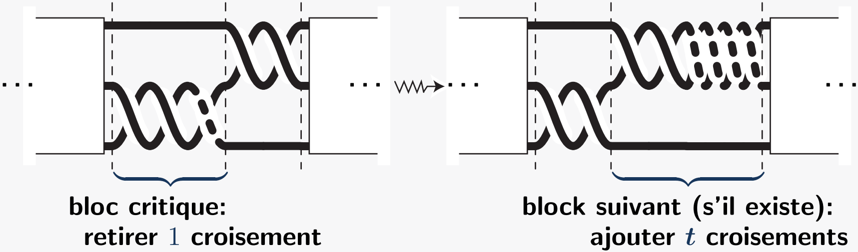
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

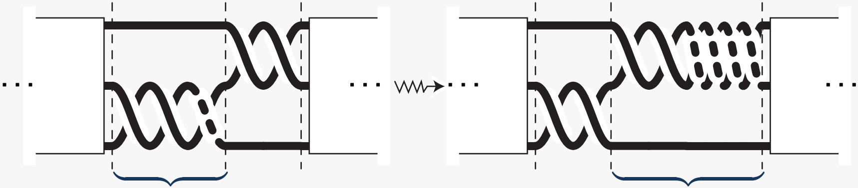
- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2,\ \sigma_2^2\sigma_1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2\sigma_1^3,\ \sigma_2\sigma_1^2,\ \sigma_2\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_1^7,$

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

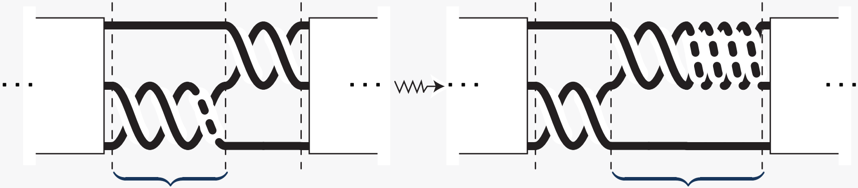
  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



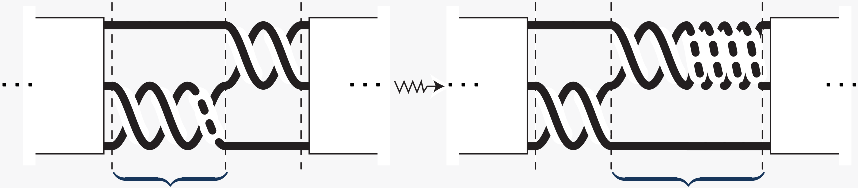
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6, σ_1^5,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



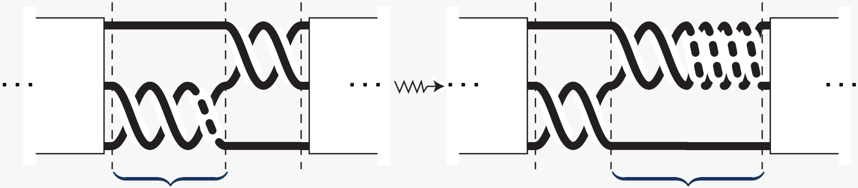
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6, σ_1^5, σ_1^4,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



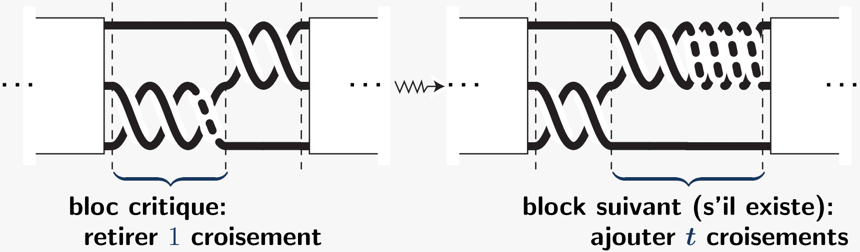
bloc critique:
retirer 1 croisement

block suivant (s'il existe):
ajouter t croisements

- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6, σ_1^5, σ_1^4, σ_1^3,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

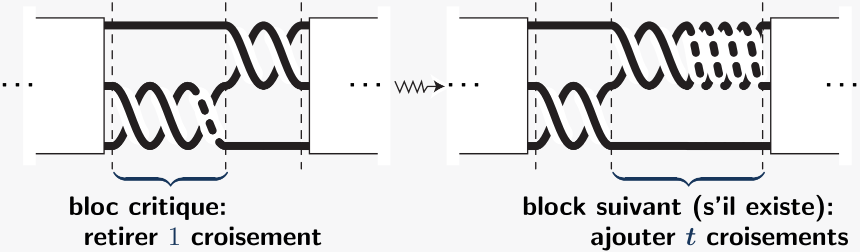
  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2,\ \sigma_2^2\sigma_1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2\sigma_1^3,\ \sigma_2\sigma_1^2,\ \sigma_2\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_1^7,\ \sigma_1^6,\ \sigma_1^5,$
  $\sigma_1^4,\ \sigma_1^3,\ \sigma_1^2,$

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

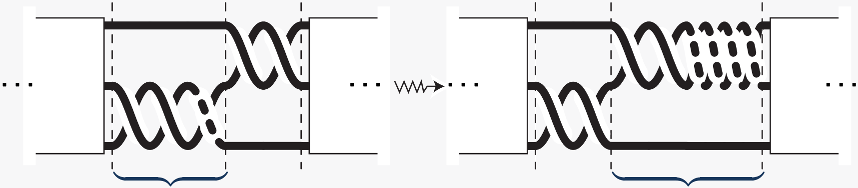
- Partir de la forme alternante de b;
- A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
  ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
- La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6, σ_1^5, σ_1^4, σ_1^3, σ_1^2, σ_1,

- La $\mathcal{G}_3$-suite à partir d'une tresse positive à 3 brins b:

  - Partir de la forme alternante de b;
  - A l'étape t: retirer 1 croisement dans le bloc critique;
    ajouter t croisements dans le bloc suivant, s'il existe;
  - La suite s'arrête quand (si) on atteint la tresse triviale.



- Exemple: $\sigma_2^2\sigma_1^2$, $\sigma_2^2\sigma_1$, σ_2^2, $\sigma_2\sigma_1^3$, $\sigma_2\sigma_1^2$, $\sigma_2\sigma_1$, σ_2, σ_1^7, σ_1^6, σ_1^5, σ_1^4, σ_1^3, σ_1^2, σ_1, 1.

- **D'autres exemples:**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$:**

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 9

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,1

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,15

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,9

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,95

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,4**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de** $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: **30 étapes;**
  - **partant de** $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: **90,159,953,47**

- **D'autres exemples:**
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,6**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,63**

- **D'autres exemples:**
  - **partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;**
  - **partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...**

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...

Et pourtant...

- **Proposition A:** Toute $\mathcal{G}_3$-suite est finie.

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...

Et pourtant...

- Proposition A: Toute $\mathcal{G}_3$-suite est finie.

Mais...

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...

Et pourtant...

- Proposition A: Toute $\mathcal{G}_3$-suite est finie.

Mais...

- Théorème: La proposition A est un énoncé d'arithmétique non prouvable dans $I\Sigma_1$.

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...

Et pourtant...

- Proposition A: Toute $\mathcal{G}_3$-suite est finie.

Mais...

- Théorème: La proposition A est un énoncé d'arithmétique non prouvable dans $I\Sigma_1$.

$\uparrow$

le sous-système de PA dans lequel l'induction est limitée aux formules avec au plus un quantificateur $\exists$

- D'autres exemples:
  - partant de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$: 30 étapes;
  - partant de $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$: 90,159,953,477,630 étapes...

Et pourtant...

- Proposition A: Toute $\mathcal{G}_3$-suite est finie.

Mais...

- Théorème: La proposition A est un énoncé d'arithmétique non prouvable dans $I\Sigma_1$.

$\uparrow$

le sous-système de PA dans lequel l'induction est limitée aux formules avec au plus un quantificateur $\exists$

par opposition au résultat du folklore:

- Toutes les propriétés (algébriques) usuelles des tresses sont prouvables dans $I\Sigma_1$.

- **Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?**

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?
  $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?
  $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- **Définition:** Pour b, b' dans $B\infty$, on déclare $b < b'$ si, parmi les mots représentant $b^{-1}b'$, il y en a au moins un où le générateur σ_i de plus haut indice n'apparaît que positivement (pas de σ_i^{-1}).

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?
  - $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- **Définition:** Pour b, b' dans $B\infty$, on déclare $b < b'$ si, parmi les mots représentant $b^{-1}b'$, il y en a au moins un où le générateur σ_i de plus haut indice n'apparaît que positivement (pas de σ_i^{-1}).

$\rightsquigarrow$ Ex.: On a $\sigma_2 < \sigma_2\sigma_1$, car $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?
  - $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- **Définition:** Pour b, b' dans B_∞, on déclare $b < b'$ si, parmi les mots représentant $b^{-1}b'$, il y en a au moins un où le générateur σ_i de plus haut indice n'apparaît que positivement (pas de σ_i^{-1}).

$\rightsquigarrow$ Ex.: On a $\sigma_2 < \sigma_2\sigma_1$, car $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$,
et, dans ce mot, σ_2 n'apparaît que positivement.

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?
  $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- **Définition:** Pour b, b' dans $B\infty$, on déclare $b < b'$ si, parmi les mots représentant $b^{-1}b'$, il y en a au moins un où le générateur σ_i de plus haut indice n'apparaît que positivement (pas de σ_i^{-1}).

$\rightsquigarrow$ Ex.: On a $\sigma_2 < \sigma_2\sigma_1$, car $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$,
et, dans ce mot, σ_2 n'apparaît que positivement.

- **Théorème:** (i) La relation $<$ est un ordre total invariant à gauche sur $B\infty$;

- Démonstration de la finitude des $\mathcal{G}_3$-suites?

  $\rightsquigarrow$ Elles sont strictement décroisssantes dans un bon ordre. $\square$

- **Définition:** Pour b, b' dans B_∞, on déclare $b < b'$ si, parmi les mots représentant $b^{-1}b'$, il y en a au moins un où le générateur σ_i de plus haut indice n'apparaît que positivement (pas de σ_i^{-1}).

$\rightsquigarrow$ Ex.: On a $\sigma_2 < \sigma_2\sigma_1$, car $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$,
et, dans ce mot, σ_2 n'apparaît que positivement.

- **Théorème:** (i) La relation $<$ est un ordre total invariant à gauche sur B_∞;
(ii) (Laver) La restriction de $<$ à B_∞^+ est un bon ordre.

L. Carlucci, P. Dehornoy, A. Weiermann,
Unprovability results involving braids
Preprint (2007).

L. Carlucci, P. Dehornoy, A. Weiermann,
Unprovability results involving braids
Preprint (2007).

P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest,
Why are braids orderable?
Panoramas & Synthèses vol. 14, Soc. Math. France (2002).

L. Carlucci, P. Dehornoy, A. Weiermann,
Unprovability results involving braids
Preprint (2007).

P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest,
Why are braids orderable?
Panoramas & Synthèses vol. 14, Soc. Math. France (2002).

P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest,
Ordering braids
Mathematic surveys and monographs, Amer. Math. Soc. (2008).

L. Carlucci, P. Dehornoy, A. Weiermann,
Unprovability results involving braids
Preprint (2007).

P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest,
Why are braids orderable?
Panoramas & Synthèses vol. 14, Soc. Math. France (2002).

P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest,
Ordering braids
Mathematic surveys and monographs, Amer. Math. Soc. (2008).

http://www.math.unicaen.fr/∼dehornoy