Le problème d'isotopie des tresses

Le problème d'isotopie des tresses

Patrick Dehornoy

Le problème d'isotopie des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

Le problème d'isotopie des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

Le problème d'isotopie des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Un problème de difficulté moyenne, avec de multiples solutions,
  dont aucune n'est triviale,
  et qui mettent en jeu des structures très variées.

Plan :

Plan :

- 1. Une solution au problème d'isotopie des tresses

Plan :

- 1. **Une** solution au problème d'isotopie des tresses
- 2. **Des** solutions au problème d'isotopie des tresses

- **Une tresse :**

- Une tresse :

- Une tresse :

- La théorie des tresses : géométrie (et calcul) des croisements ;

- Une tresse :

- La théorie des tresses : géométrie (et calcul) des croisements ;

C.F.Gauss
1777–1855

- Une tresse :

- La théorie des tresses : géométrie (et calcul) des croisements ;

C.F.Gauss
1777–1855

A.Hurwitz
1859–1919

- Une tresse :

- La théorie des tresses : géométrie (et calcul) des croisements ;

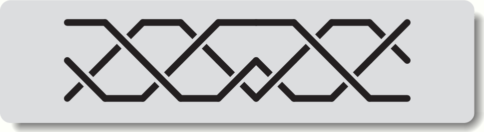
C.F.Gauss
1777–1855

A.Hurwitz
1859–1919

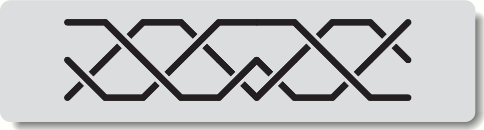
E.Artin
1898–1962

- **Un diagramme de tresse à 3 brins :**

- Un diagramme de tresse à 3 brins :

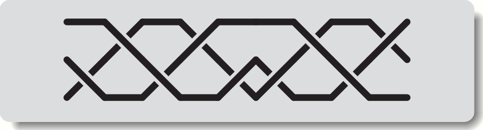


- Un diagramme de tresse à 3 brins :



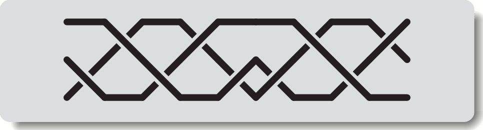
- Problème d'isotopie :

- Un diagramme de tresse à 3 brins :



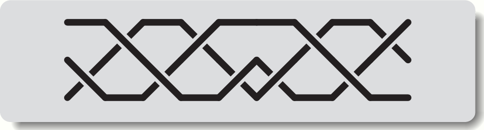
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

- Un diagramme de tresse à 3 brins :

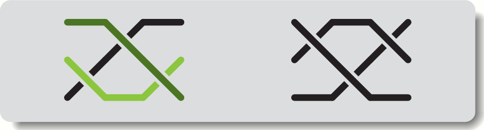


- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

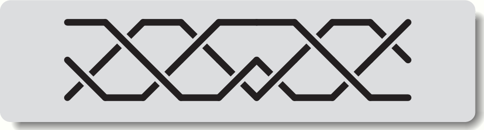
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

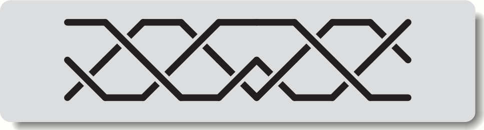


- Un diagramme de tresse à 3 brins :



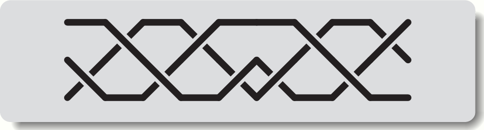
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes,
  peut-on déformer l'un en l'autre ?

- Un diagramme de tresse à 3 brins :



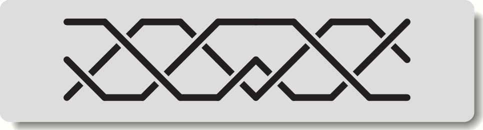
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

- Un diagramme de tresse à 3 brins :



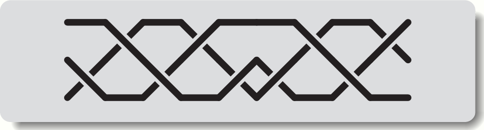
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

- Un diagramme de tresse à 3 brins :

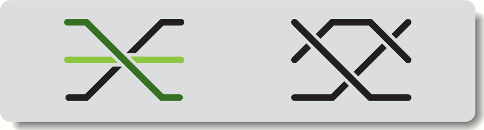


- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

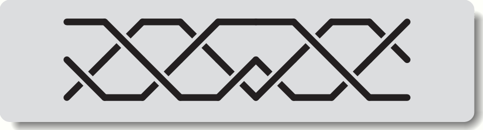
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

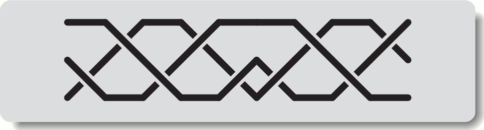


- Un diagramme de tresse à 3 brins :

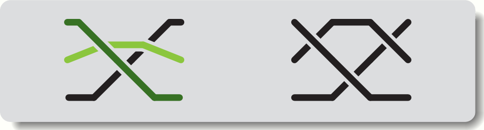


- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

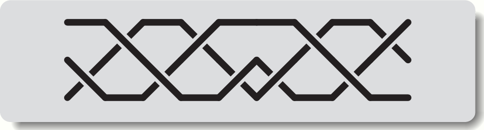
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



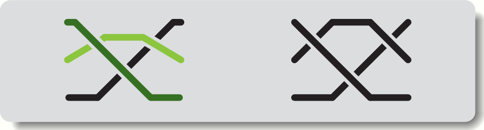
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?



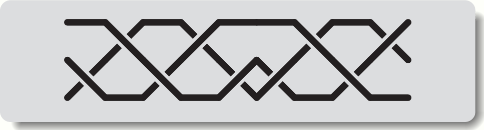
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



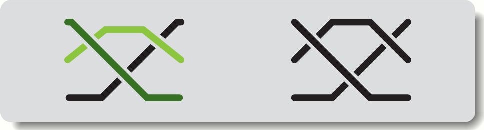
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?



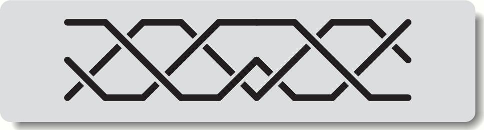
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

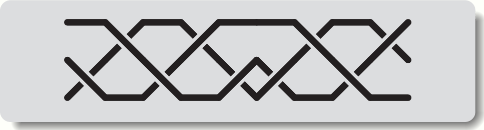


- Un diagramme de tresse à 3 brins :

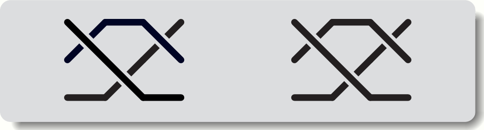


- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?

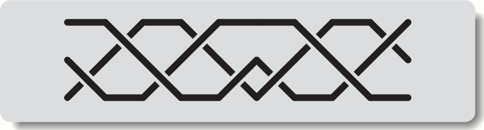
- Un diagramme de tresse à 3 brins :



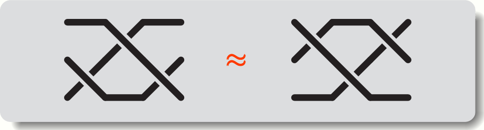
- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?



- Un diagramme de tresse à 3 brins :



- Problème d'isotopie : Etant donnés deux diagrammes, peut-on déformer l'un en l'autre ?



est isotope à

Intérêt du problème

- Intérêt en coiffure...

- Intérêt en coiffure...
- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:

Tout nœud (tout entrelacs) est
clôture d'une tresse.

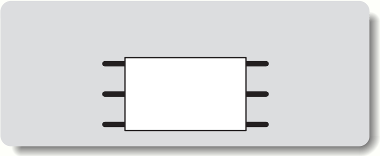
Intérêt du problème

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
  Tout nœud (tout entrelacs) est clôture d'une tresse.

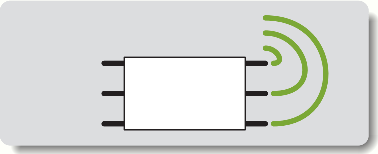


- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
Tout nœud (tout entrelacs) est clôture d'une tresse.

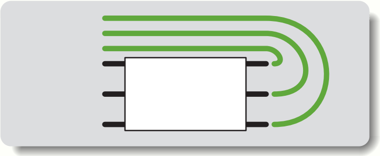


- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  $\rightsquigarrow$ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  $\rightsquigarrow$ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
Tout nœud (tout entrelacs) est clôture d'une tresse.

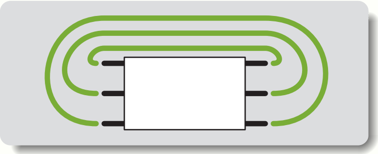


- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  ⇝ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  ⇝ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
  Tout nœud (tout entrelacs) est
  clôture d'une tresse.

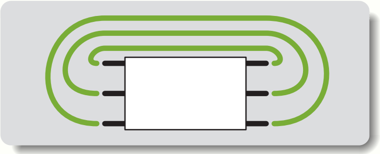


- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  ⇝ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  ⇝ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
Tout nœud (tout entrelacs) est clôture d'une tresse.



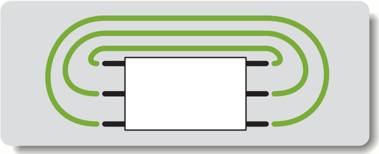
⇝ isotopie des tresses = première étape vers isotopie des nœuds.

- Intérêt en coiffure...

- Une tresse = une classe d'isotopie de diagrammes
  ⇝ solution au problème d'isotopie
  = condition pour parler de tresses de façon non ambiguë.

- En particulier : préliminaire pour toute utilisation algorithmique
  ⇝ cryptographie (remplacer les entiers par des tresses ?)

- Lien avec la théorie des nœuds:
  Tout nœud (tout entrelacs) est clôture d'une tresse.



⇝ isotopie des tresses = première étape vers isotopie des nœuds.

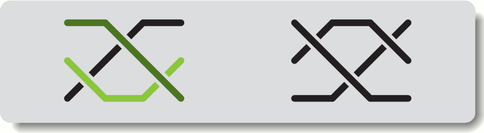
- Liens avec la physique (équation de Yang–Baxter), la chimie, et la biologie (macromolécules, ADN).

- **Deux demi-problèmes :**

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.



- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**

- Deux demi-problèmes :

- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**

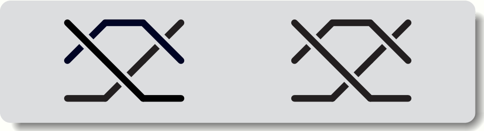
- Deux demi-problèmes :

- Prouver une isotopie : construire la déformation.

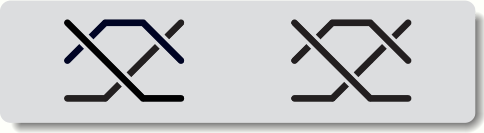
- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

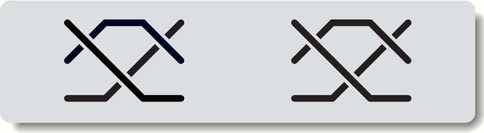
- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.



- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**

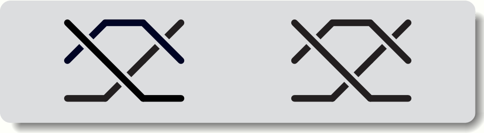


- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.



- Prouver une non-isotopie :

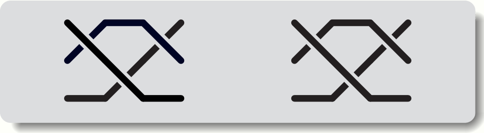
- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**



- **Prouver une non-isotopie : trouver un invariant**

  $I : \{\textbf{diagrammes}\} \to \Omega$

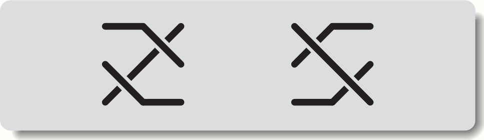
- **Deux demi-problèmes :**
- **Prouver une isotopie : construire la déformation.**



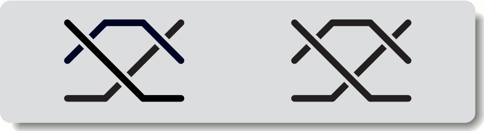
- **Prouver une non-isotopie : trouver un invariant**
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ **t.q.** $D \approx D'$ **entraîne** $I(D) = I(D')$.

- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

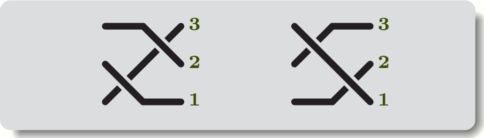
- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



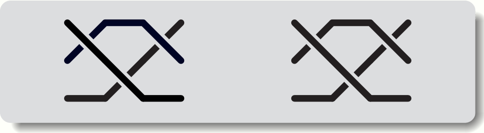
- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.



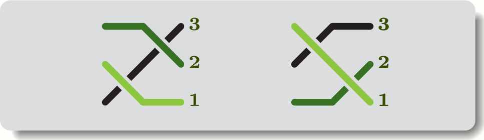
- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  I : {diagrammes} $\to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

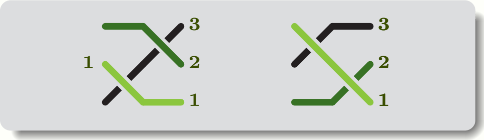


- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.

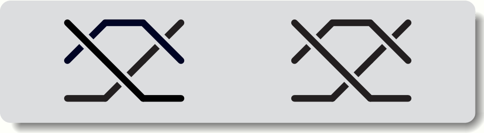


- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

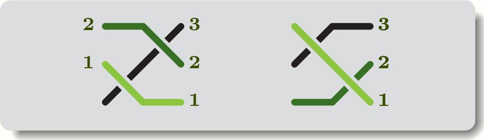
- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.

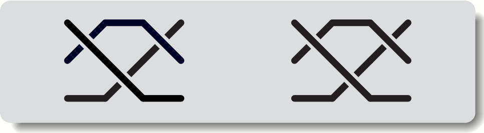


- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



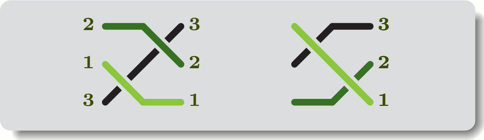
- Deux demi-problèmes :

- Prouver une isotopie : construire la déformation.



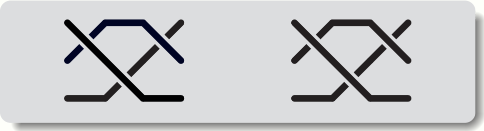
- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.

- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



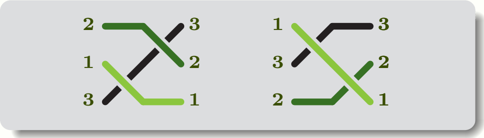
- Deux demi-problèmes :

- Prouver une isotopie : construire la déformation.

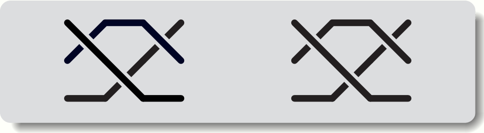


- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  I : {diagrammes} $\to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.

- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.



- Deux demi-problèmes :
- Prouver une isotopie : construire la déformation.



- Prouver une non-isotopie : trouver un invariant
  $I : \{\text{diagrammes}\} \to \Omega$ t.q. $D \approx D'$ entraîne $I(D) = I(D')$.
- Exemple 1: permutation: $\Omega = \mathfrak{S}_n$.

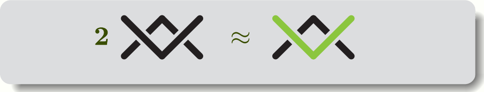
- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

- **Exemple 2: nombre de croisements:** $\Omega = \mathbb{N}$ **?**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

2 

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**



- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$ 

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

2  $\approx$ 

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$$2 \quad \text{} \quad \approx$$

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$ 

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$ 

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$ 

Des invariants

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

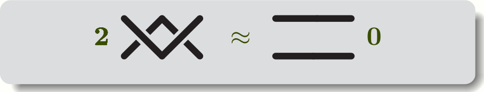
2  $\approx$  **0**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

2  $\approx$  **0**

$\rightsquigarrow$ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**



$\rightsquigarrow$ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

$\rightsquigarrow$ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

2  $\approx$  **0**

- ⇝ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- ⇝ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

$\rightsquigarrow$ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

$\rightsquigarrow$ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{2}-\mathbf{1}$  

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

2  $\approx$  **0**

$\rightsquigarrow$ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

- ⇝ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**
- ⇝ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

$\mathbf{+1 = +2 - 1}$   $\mathbf{+1 - 2}$

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

$\rightsquigarrow$ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$\mathbf{+1 = +2 - 1}$   $\mathbf{+1 - 2 = -1}$

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

⇝ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

⇝ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  $\not\approx$  $+\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

  - ⇝ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**
  - ⇝ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  $\not\approx$  $+\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$

- **Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

⇝ **parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.**

⇝ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  $\not\approx$  $+\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$

- **Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\Omega = \mathbb{Z}$.**

- **Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?**

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

⇝ **parité nombre de croisements : $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{Z}/\mathbf{2}\mathbb{Z}$.**

⇝ **différence nombres de croisements dessus-dessous : $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  $\not\approx$  $+\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$

- **Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\boldsymbol{\Omega} = \mathbb{Z}$.**

$+\mathbf{2}$  

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

$\rightsquigarrow$ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+1 = +2 - 1$  $\not\approx$  $+1 - 2 = -1$

- Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+2$   -2

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

$\mathbf{2}$  $\approx$  $\mathbf{0}$

⇝ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

⇝ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+\mathbf{1} = +\mathbf{2} - \mathbf{1}$  $\not\approx$  $+\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1}$

- Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+\mathbf{2}$  $\not\approx$  $-\mathbf{2}$

- Exemple 2: nombre de croisements: $\Omega = \mathbb{N}$?

2  $\approx$  0

⇝ parité nombre de croisements : $\Omega = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

⇝ différence nombres de croisements dessus-dessous : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+1 = +2 - 1$  $\not\approx$  $+1 - 2 = -1$

- Exemple 3: nombre d'enlacement de deux brins : $\Omega = \mathbb{Z}$.

$+2$  $\not\approx$  -2

plus généralement, supprimer des brins (= projeter)

- **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

- **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

↑
qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

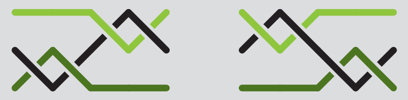
qui sépare deux diagrammes non isotopes quelconques

- Un exemple résistant :

- **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

↑
qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- Un exemple résistant :



- **Question : Obtient-on ainsi une famille complète d'invariants ?**

qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- **Un exemple résistant :**

- non isotopes (à démontrer), et pourtant

- **Question : Obtient-on ainsi une famille complète d'invariants ?**

qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- **Un exemple résistant :**

- non isotopes (à démontrer), et pourtant
- même permutation,

• **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

↑ qui sépare deux diagrammes non isotopes quelconques

• Un exemple résistant :

- non isotopes (à démontrer), et pourtant
- même permutation,
- même nombres d'enlacement des brins deux à deux,

- **Question : Obtient-on ainsi une famille complète d'invariants ?**

↑
qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- **Un exemple résistant :**

- non isotopes (à démontrer), et pourtant
- même permutation,
- même nombres d'enlacement des brins deux à deux,
- donc même différence dessus-dessous.

- **Question** : Obtient-on ainsi une famille **complète** d'invariants ?

qui sépare deux diagrammes
non isotopes quelconques

- Un exemple résistant :

- non isotopes (à démontrer), et pourtant
- même permutation,
- même nombres d'enlacement des brins deux à deux,
- donc même différence dessus-dessous.

$\rightsquigarrow$ Ce n'est **pas** un problème trivial...

- **Le point de départ** **d'une approche moins naïve :**

- **Le point de départ** d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- **Le point de départ d'une approche moins naïve :**

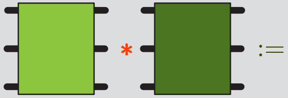
Les tresses ont une structure de groupe.

- **Produit de deux diagrammes de tresse :**

- **Le point de départ** d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

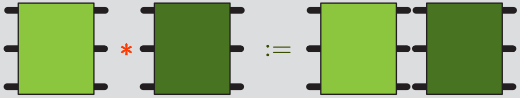
- **Produit de deux diagrammes de tresse :**



- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

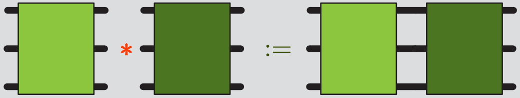
- **Produit** de deux diagrammes de tresse :



- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

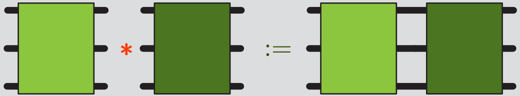
- Produit de deux diagrammes de tresse :



- **Le point de départ** d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- **Produit de deux diagrammes de tresse :**

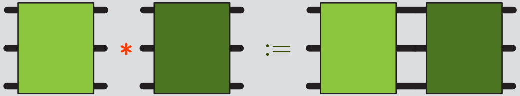


- **Associatif ;**

- Le point de départ d'une approche moins naïve :

> Les tresses ont une structure de groupe.

- Produit de deux diagrammes de tresse :

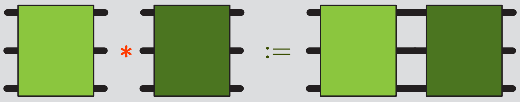


- Associatif ;
- Compatible avec l'isotopie $\rightsquigarrow$ induit un produit sur les tresses ;

- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- Produit de deux diagrammes de tresse :

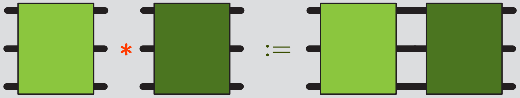


- Associatif ;
- Compatible avec l'isotopie $\rightsquigarrow$ induit un produit sur les tresses ;
- Possède un élément neutre :

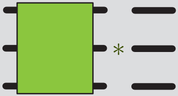
- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- Produit de deux diagrammes de tresse :



- Associatif ;
- Compatible avec l'isotopie ⇝ induit un produit sur les tresses ;
- Possède un élément neutre :

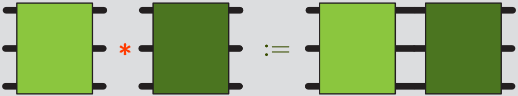


Produit des tresses

- Le point de départ d'une approche moins naïve :

> **Les tresses ont une structure de groupe.**

- **Produit** de deux diagrammes de tresse :

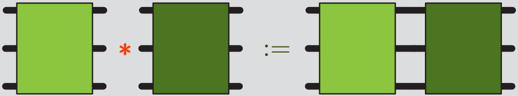


- **Associatif** ;
- **Compatible** avec l'isotopie $\rightsquigarrow$ induit un produit sur les tresses ;
- Possède un **élément neutre** :

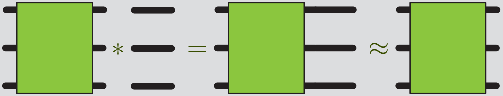
- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- Produit de deux diagrammes de tresse :



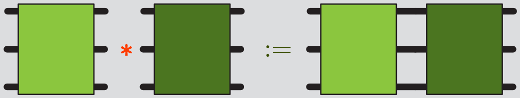
- Associatif ;
- Compatible avec l'isotopie $\rightsquigarrow$ induit un produit sur les tresses ;
- Possède un élément neutre :



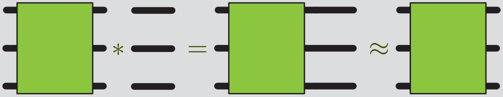
- Le point de départ d'une approche moins naïve :

Les tresses ont une structure de groupe.

- Produit de deux diagrammes de tresse :



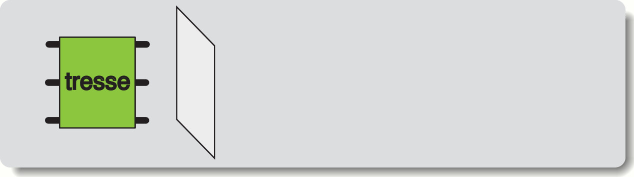
- Associatif ;
- Compatible avec l'isotopie $\rightsquigarrow$ induit un produit sur les tresses ;
- Possède un élément neutre :



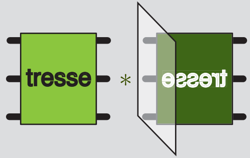
- **Le produit possède des inverses :**

- **Le produit possède des inverses :**

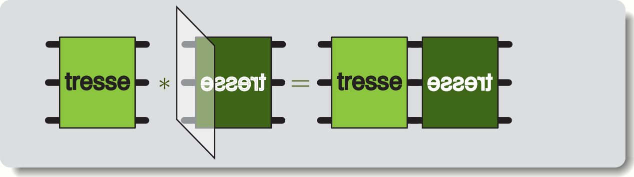
- **Le produit possède des inverses :**



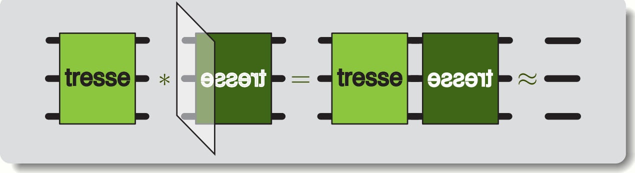
- **Le produit possède des inverses :**



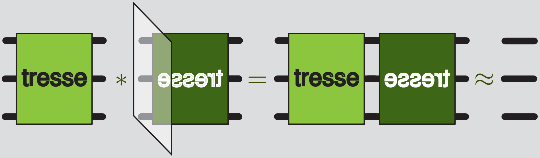
- **Le produit possède des inverses :**



- **Le produit possède des inverses :**

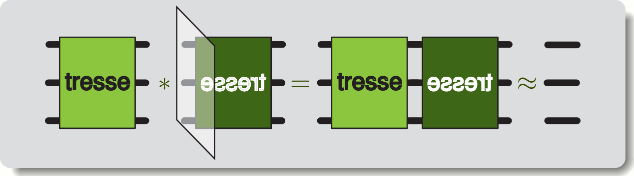


- Le produit possède des inverses :

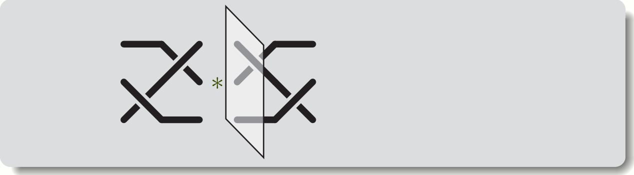


- Exemple :

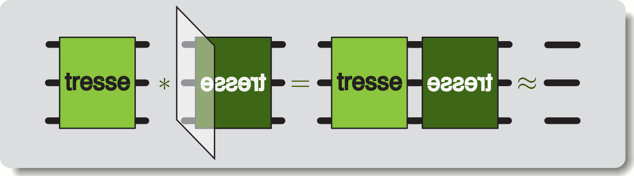
- Le produit possède des inverses :



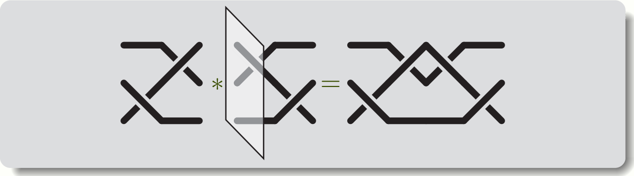
- Exemple :



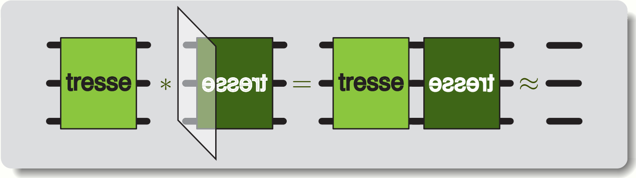
- Le produit possède des inverses :



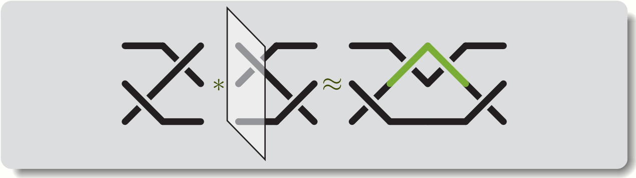
- Exemple :



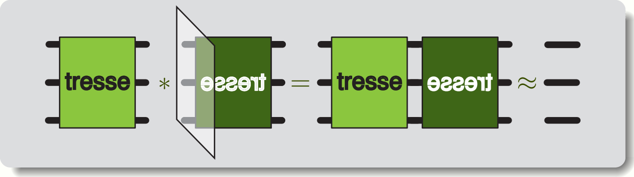
- Le produit possède des inverses :



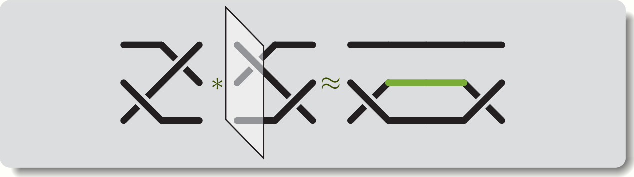
- Exemple :



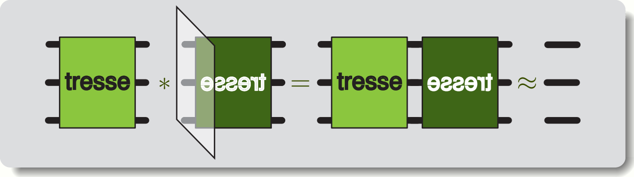
- Le produit possède des inverses :



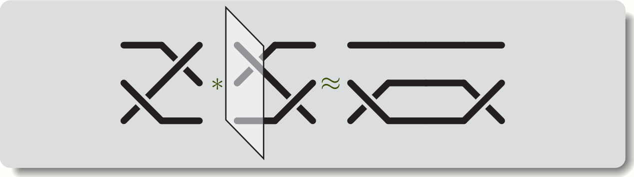
- Exemple :



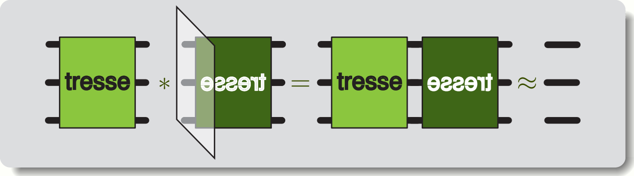
- Le produit possède des inverses :



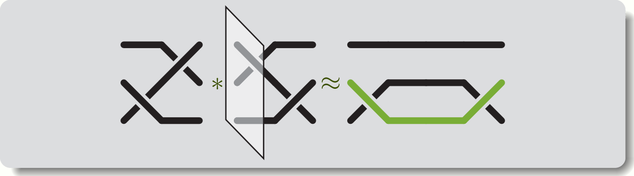
- Exemple :



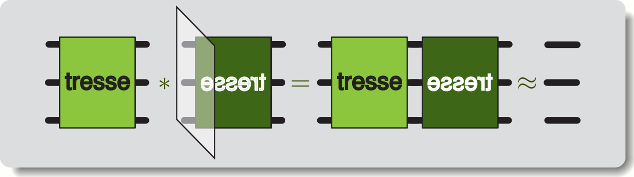
- Le produit possède des inverses :



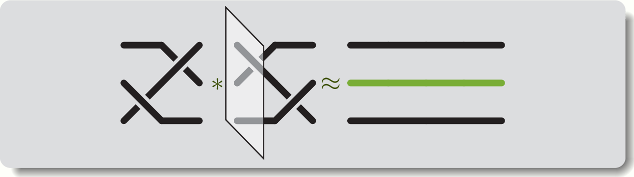
- Exemple :



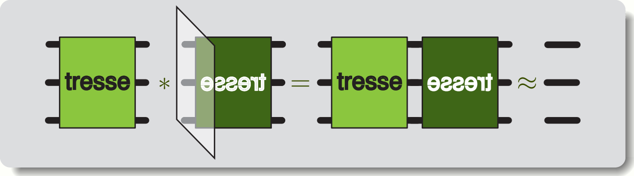
- Le produit possède des inverses :



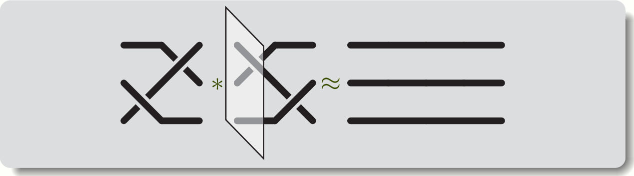
- Exemple :



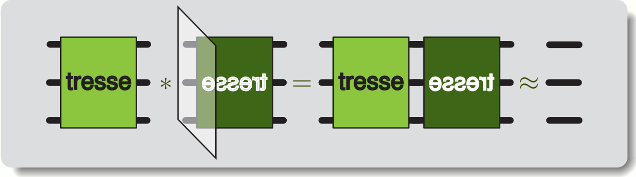
- Le produit possède des inverses :



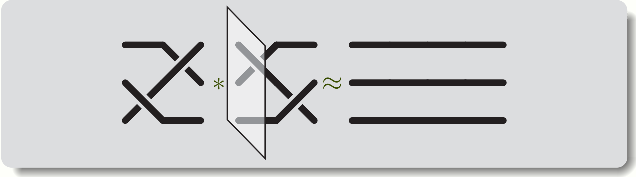
- Exemple :



- Le produit possède des inverses :

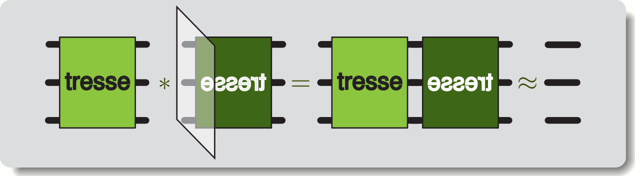


- Exemple :

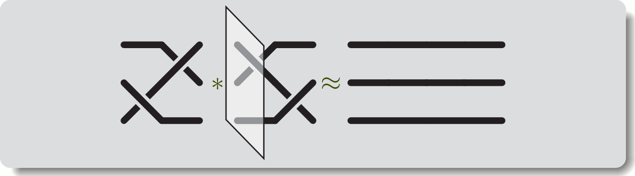


- Pour chaque n, le groupe B_n des tresses à n brins.

- Le produit possède des inverses :



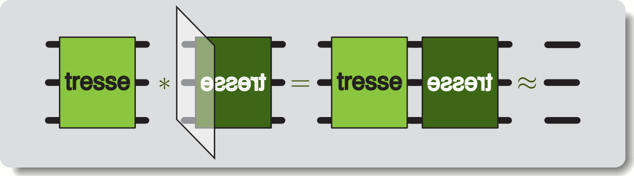
- Exemple :



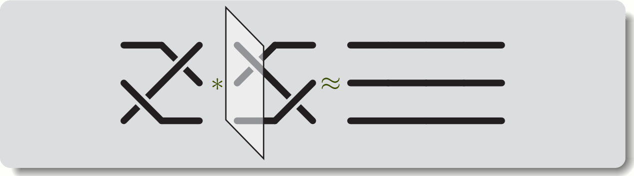
- Pour chaque n, le groupe B_n des tresses à n brins.

classes d'isotopie de diagrammes

- Le produit possède des inverses :



- Exemple :



- Pour chaque n, le groupe B_n des tresses à n brins.

classes d'isotopie de diagrammes

- NB: Une tresse est représentée par plusieurs diagrammes.

- **Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?**

- **Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?**

- **Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :**

- Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?

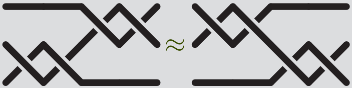
- Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :

$$D \approx D' \iff D^{-1} * D' \approx 1.$$

- **Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?**

- **Réduction** du problème d'isotopie au problème de **trivialité** :

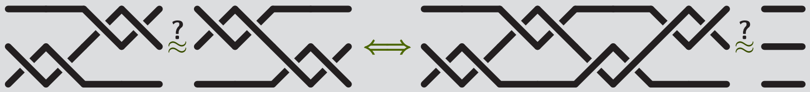
$$D \approx D' \quad \Longleftrightarrow \quad D^{-1} * D' \approx 1.$$



- **Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?**

- **Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :**

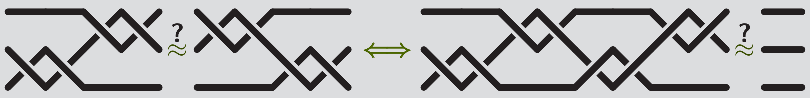
$$D \approx D' \quad \Longleftrightarrow \quad D^{-1} * D' \approx 1.$$



- Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?

- Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :

$$D \approx D' \quad \Longleftrightarrow \quad D^{-1} * D' \approx 1.$$

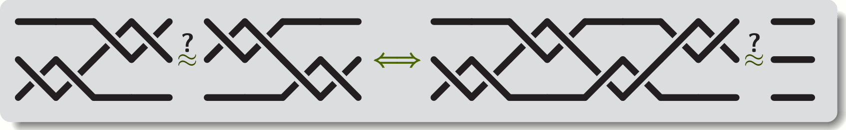


- Possibilité d'utiliser des méthodes générales d'algèbre (?)

- Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?

- Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :

$$D \approx D' \quad \Longleftrightarrow \quad D^{-1} * D' \approx 1.$$



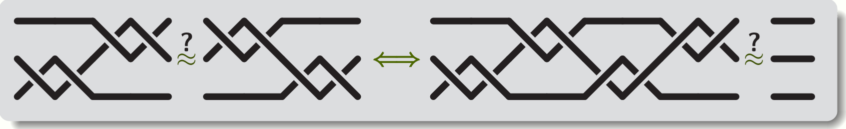
- Possibilité d'utiliser des méthodes générales d'algèbre (?)

$\rightsquigarrow$ requiert d'abord une spécification du groupe B_n.

• Que gagne-t-on avec la structure de groupe ?

• Réduction du problème d'isotopie au problème de trivialité :

$$D \approx D' \quad \Longleftrightarrow \quad D^{-1} * D' \approx 1.$$



• Possibilité d'utiliser des méthodes générales d'algèbre (?)

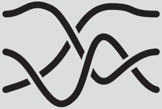
$\rightsquigarrow$ requiert d'abord une spécification du groupe B_n.

$\uparrow$

typiquement : une présentation
par générateurs et relations

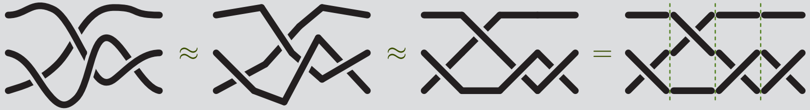
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :

- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :

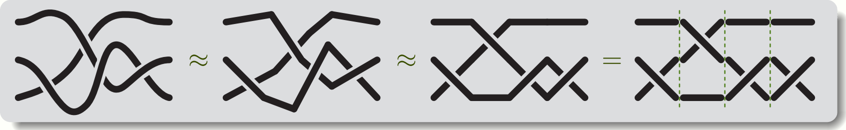

$\approx$


- Normalisation et décomposition des diagrammes :

- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :

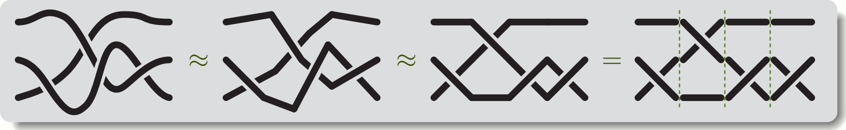


- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :

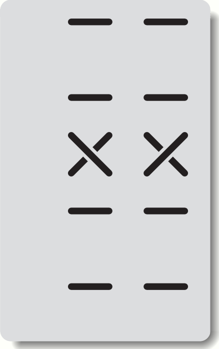


- Générateurs **d'Artin** :

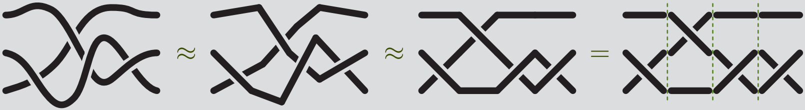
- Normalisation et décomposition des diagrammes :



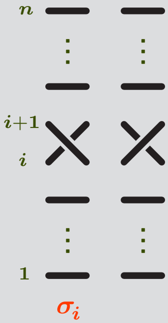
- Générateurs d'Artin :



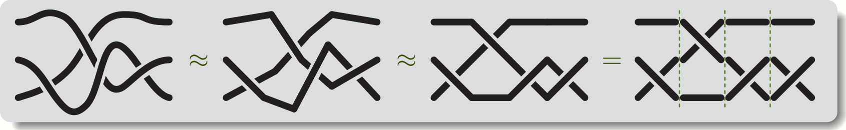
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



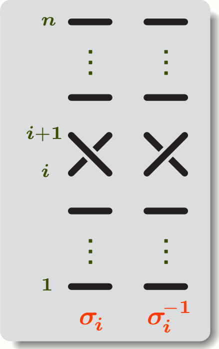
- Générateurs **d'Artin** :



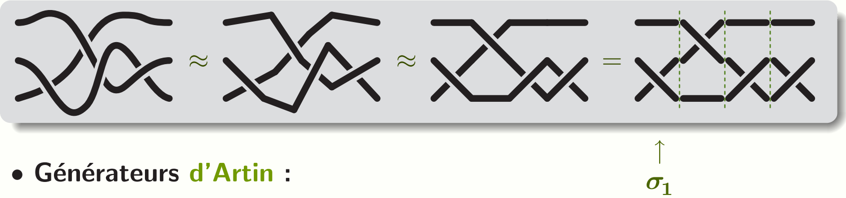
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



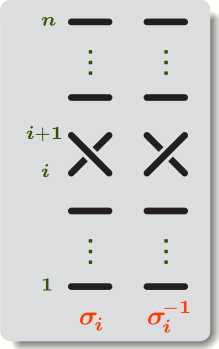
- Générateurs **d'Artin** :



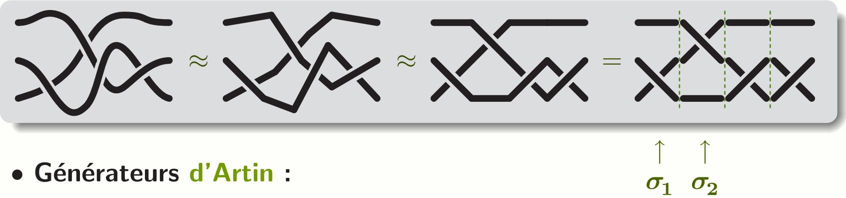
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



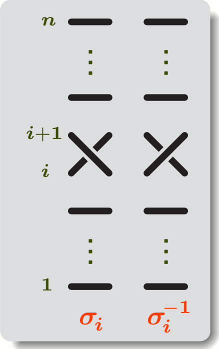
- Générateurs **d'Artin** :



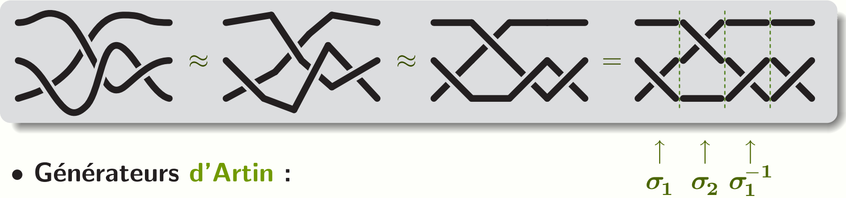
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



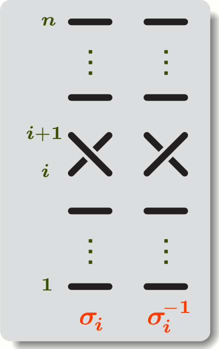
- Générateurs **d'Artin** :



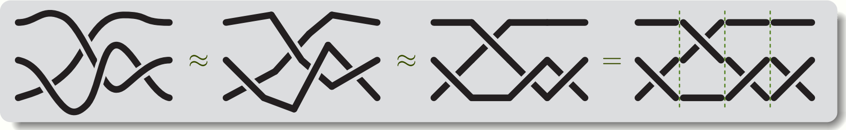
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



- Générateurs **d'Artin** :

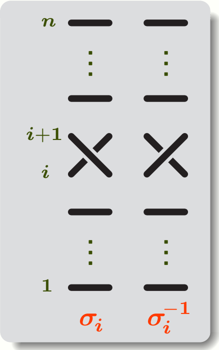


- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :

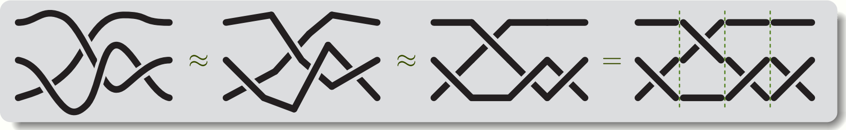


$\uparrow \sigma_1 \quad \uparrow \sigma_2 \quad \uparrow \sigma_1^{-1} \quad \uparrow \sigma_1^{-1}$

- Générateurs **d’Artin** :

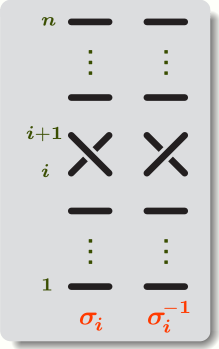


- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



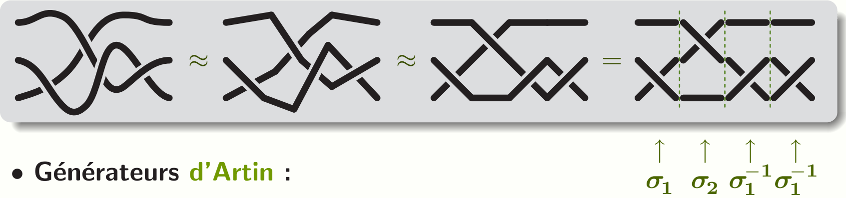
$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_1^{-1} \quad \sigma_1^{-1}$

- Générateurs **d'Artin** :

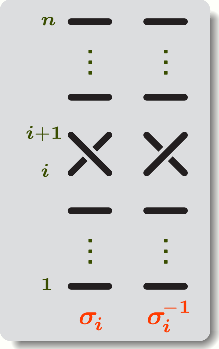


- Remarque : B_{n-1} identifié à un sous-groupe de B_n

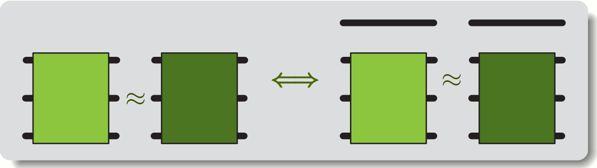
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



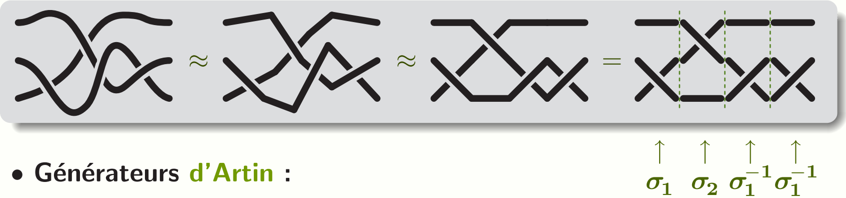
- Générateurs **d'Artin** :



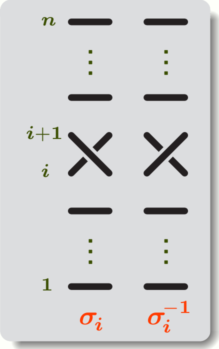
- Remarque : B_{n-1} identifié à un sous-groupe de B_n



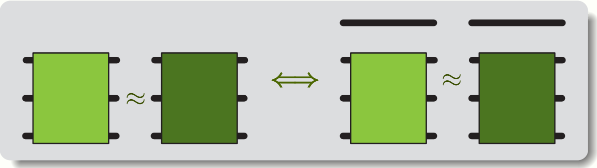
- **Normalisation** et **décomposition** des diagrammes :



- Générateurs **d'Artin** :



- Remarque : B_{n-1} identifié à un sous-groupe de B_n

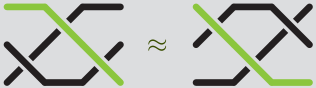


donc pas d'ambiguïté sur σ_i

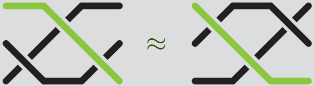
- **Relations entre les σ_i :**

- **Relations** entre les σ_i :

- **Relations** entre les σ_i :

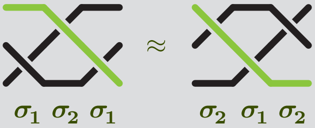


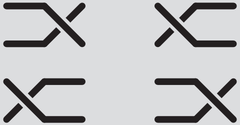
- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_1 \approx \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_2$

- **Relations** entre les σ_i :





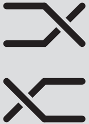
- **Relations** entre les σ_i :

- **Relations** entre les σ_i :

$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_1$

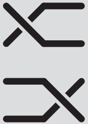
$\approx$

$\sigma_2 \ \sigma_1 \ \sigma_2$



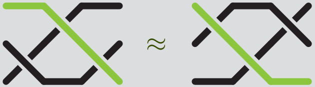
$\sigma_1 \ \sigma_3$

$\approx$

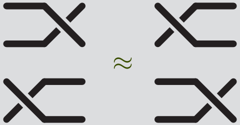


$\sigma_3 \ \sigma_1$

- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_1 \approx \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_2$

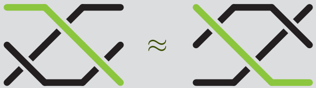


$\sigma_1\ \sigma_3 \approx \sigma_3\ \sigma_1$

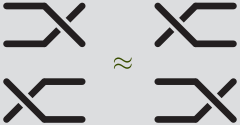
Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \right\rangle.$$

- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_1 \qquad \sigma_2 \ \sigma_1 \ \sigma_2$



$\sigma_1 \ \sigma_3 \qquad \sigma_3 \ \sigma_1$

Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

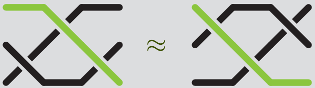
$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle.$$

- **Relations** entre les σ_i :

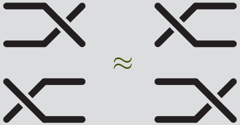
Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_1 \approx \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_2$



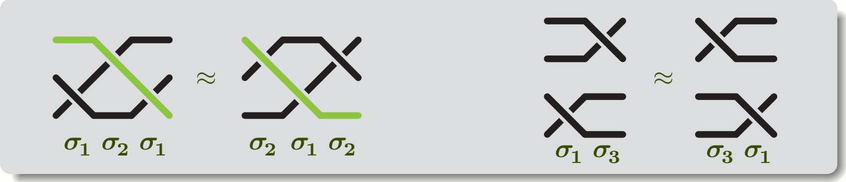
$\sigma_1\ \sigma_3 \approx \sigma_3\ \sigma_1$

Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. $\square$

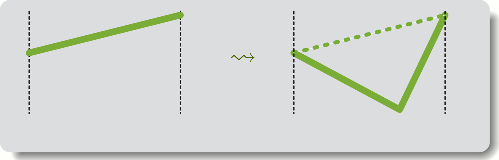
- **Relations** entre les σ_i :



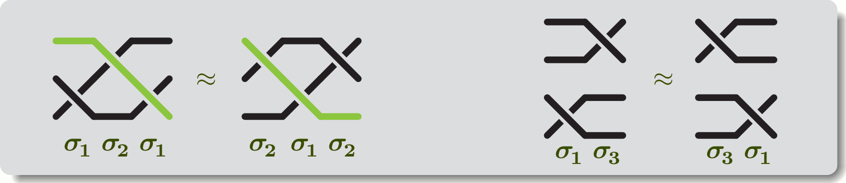
Théorème (Artin ’25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. □



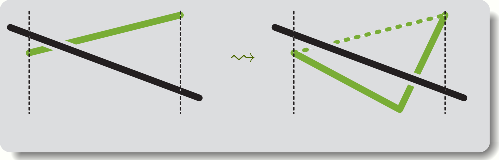
- **Relations** entre les σ_i :



Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. □



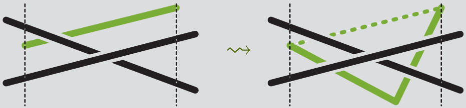
- **Relations** entre les σ_i :

$\sigma_1 \; \sigma_2 \; \sigma_1 \approx \sigma_2 \; \sigma_1 \; \sigma_2$ $\qquad$ $\sigma_1 \; \sigma_3 \approx \sigma_3 \; \sigma_1$

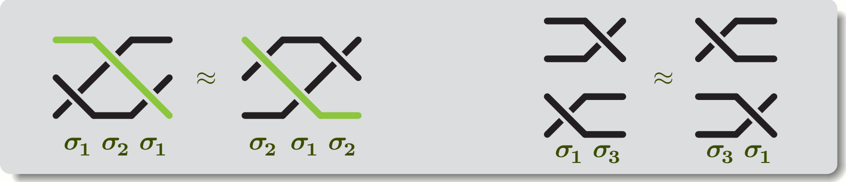
Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. $\square$



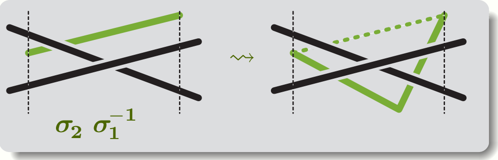
- **Relations** entre les σ_i :



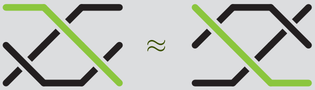
Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

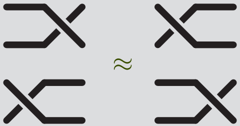
- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. $\square$



- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_1 \approx \sigma_2 \ \sigma_1 \ \sigma_2$

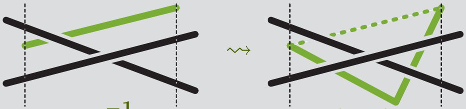


$\sigma_1 \ \sigma_3 \approx \sigma_3 \ \sigma_1$

Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

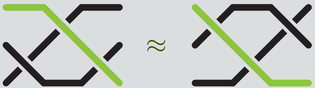
$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. $\square$

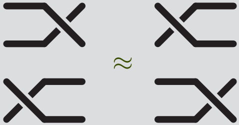


$\sigma_2 \ \sigma_1^{-1} \rightsquigarrow \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$

- **Relations** entre les σ_i :



$\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_1 \approx \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_2$

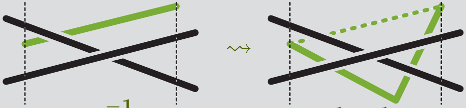


$\sigma_1\ \sigma_3 \approx \sigma_3\ \sigma_1$

Théorème (Artin '25) : Le groupe B_n admet la présentation

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle.$$

- **Démonstration** :
Isotopie de diagrammes affines par morceaux = Δ-mouvements. □



$\sigma_2\ \sigma_1^{-1} \rightsquigarrow \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$

- **Conséquence :**

- **Conséquence : Le problème d'isotopie des tresses est ramené au problème de mot du groupe de présentation ...xxx... :**

- **Conséquence : Le problème d'isotopie des tresses est ramené au problème de mot du groupe de présentation ...xxx... :**

- **Problème : Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.**

- **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$
$\downarrow$

- **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

• **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$

$\downarrow$

• **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$

si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$

$\downarrow$

- **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$

si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- **Gagné ?**

- **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$

$\downarrow$

- **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$

si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- **Gagné ?** non...

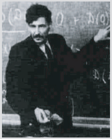
- **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$
$\downarrow$

- **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$
si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- **Gagné ?** non...



- **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$

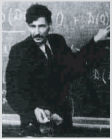
$\downarrow$

- **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$

si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- **Gagné ?** non...



- **Théorème (P. Novikov '52) :**

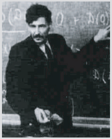
• **Conséquence :** Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$
$\downarrow$

• **Problème :** Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$
si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j|=1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

• **Gagné ?** non...



• **Théorème** (P. Novikov '52) :
Il existe une présentation de groupe finie dont le problème de mot est indécidable.

- Conséquence : Le problème d'isotopie des tresses est ramené au **problème de mot** du groupe de présentation ...xxx... :

un mot sur les lettres $\sigma_i^{\pm 1}$

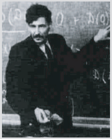
$\downarrow$

- **Problème** : Etant donné un mot de tresse w, déterminer si w représente la tresse triviale dans B_n.

$\uparrow$

si on a $w \equiv \varepsilon$, où $\equiv$ est la plus petite congruence contenant les paires $(\sigma_i\sigma_j\sigma_i, \sigma_j\sigma_i\sigma_j)$ avec $|i-j| = 1$, et $(\sigma_i\sigma_j, \sigma_j\sigma_i)$ avec $|i-j| \geqslant 2$, et $(\sigma_i\sigma_i^{-1}, \varepsilon)$ et $(\sigma_i^{-1}\sigma_i, \varepsilon)$.

- Gagné ? non...



- **Théorème** (P. Novikov '52) : Il existe une présentation de groupe finie dont le problème de mot est indécidable.

$\uparrow$

il n'existe pas d'algorithme le résolvant

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le **monoïde** (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le monoïde (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots positifs associée aux relations ci-dessus

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le monoïde (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots positifs associée aux relations ci-dessus (notamment pb. de mot).

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le monoïde (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots positifs associée aux relations ci-dessus (notamment pb. de mot).
- (Markov, Post) Il existe une présentation finie de monoïde dont le problème de mot est indécidable.

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le **monoïde** (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots **positifs** associée aux relations ci-dessus (notamment pb. de mot).
- (Markov, Post) Il existe une présentation finie de monoïde dont le problème de mot est indécidable.

Fait : Le problème de mot pour B_n^+ est décidable.

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le monoïde (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+ .$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots positifs associée aux relations ci-dessus (notamment pb. de mot).
- (Markov, Post) Il existe une présentation finie de monoïde dont le problème de mot est indécidable.

Fait : Le problème de mot pour B_n^+ est décidable.

- Démonstration : Comme $w \equiv^+ w'$ entraîne $\lg(w) = \lg(w')$,

Solution (Garside) : Utiliser un monoïde.

Définition : On appelle B_n^+ le **monoïde** (= pas d'inverses)

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Etude de B_n^+ = étude de $\equiv^+$, équivalence de mots **positifs** associée aux relations ci-dessus (notamment pb. de mot).
- (Markov, Post) Il existe une présentation finie de monoïde dont le problème de mot est indécidable.

Fait : Le problème de mot pour B_n^+ est décidable.

- Démonstration : Comme $w \equiv^+ w'$ entraîne $\lg(w) = \lg(w')$, on peut énumérer exhaustivement les classes d'équivalence. $\square$

- **Qu'a-t-on gagné ?**

- **Qu'a-t-on gagné ?** Pour le moment : rien !

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside :

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

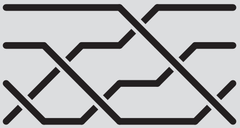
Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

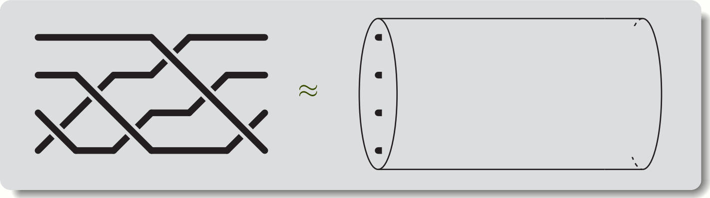
- (Mot de) **tresse de Garside** : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

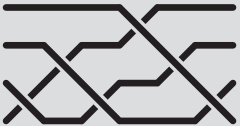
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

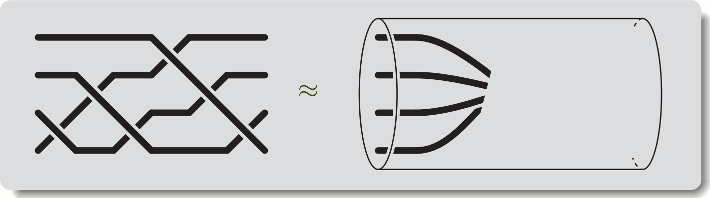
- (Mot de) tresse de Garside : $\boldsymbol{\Delta}_1 = 1$, $\boldsymbol{\Delta}_n = \boldsymbol{\Delta}_{n-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n-1} \dots \boldsymbol{\sigma}_2 \boldsymbol{\sigma}_1$.


$\approx$


- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

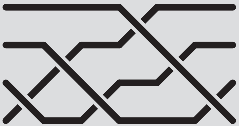
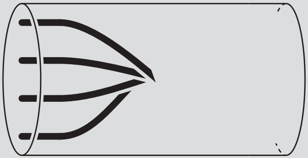
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

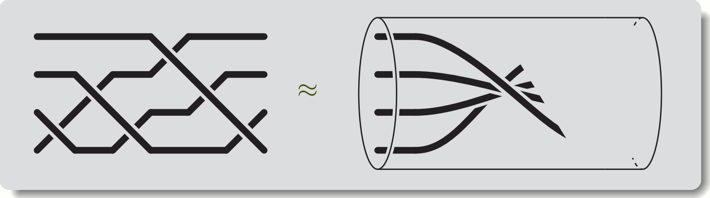
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \ldots \sigma_2 \sigma_1$.


$\approx$


- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

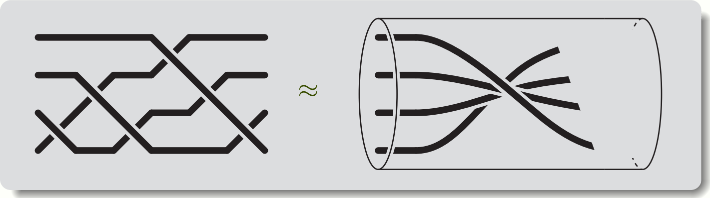
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

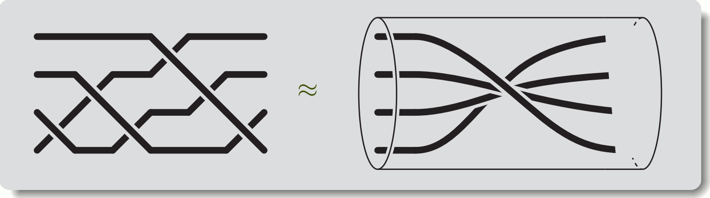
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

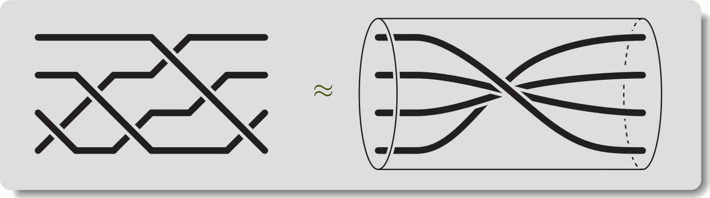
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

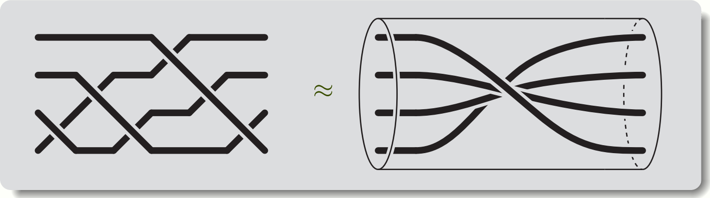
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

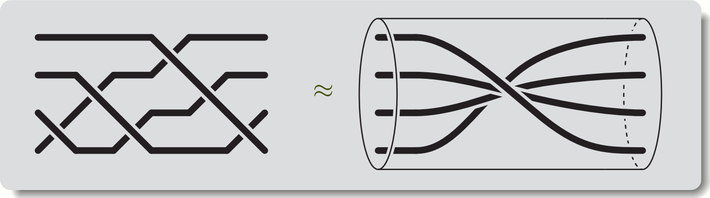
- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.



- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.

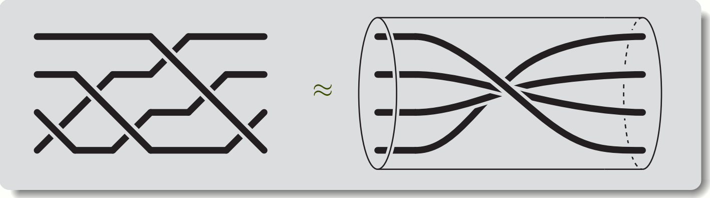


Lemme : Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\sigma_i \Delta_n \equiv \Delta_n \sigma_{n-i}$,

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$.

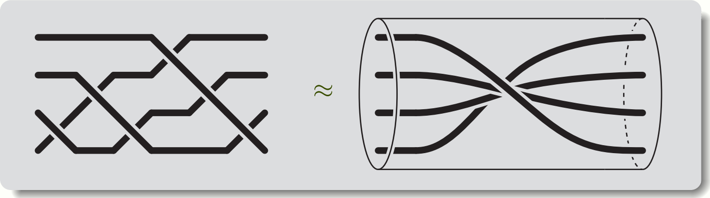


Lemme : Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\sigma_i \Delta_n \equiv \Delta_n \sigma_{n-i}$, et $\sigma_i^{-1} \Delta_n$ est équivalent à un mot positif.

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.



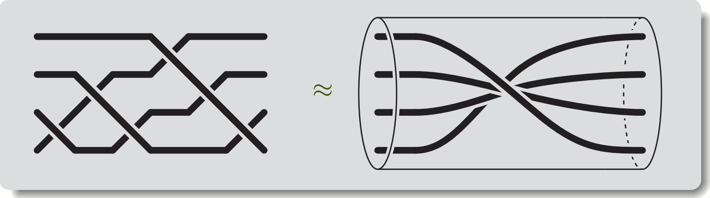
Lemme : Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\sigma_i\Delta_n \equiv \Delta_n\sigma_{n-i}$, et $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ est équivalent à un mot positif.

- Donc, pour tout w, il existe $p \geqslant 0$ et v positifs t.q. $\Delta_n^p w \equiv v$,

- Qu'a-t-on gagné ? Pour le moment : rien !

Question 1 : Comment ramener le problème $w \equiv \varepsilon$ (w quelconque) à un problème de mots positifs (pas de σ_i^{-1}) ?

- (Mot de) tresse de Garside : $\Delta_1 = 1$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2\sigma_1$.



Lemme : Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\sigma_i \Delta_n \equiv \Delta_n \sigma_{n-i}$, et $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ est équivalent à un mot positif.

- Donc, pour tout w, il existe $p \geqslant 0$ et v positifs t.q. $\Delta_n^p w \equiv v$,

  … et alors $w \equiv \varepsilon$ équivaut à $\Delta_n^p \equiv v$.

- **A-t-on gagné maintenant?**

- **A-t-on gagné maintenant? toujours pas...**

- **A-t-on gagné maintenant?** toujours pas...
- **Problème** $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ **ramené à** $\boldsymbol{\Delta_n^p} \stackrel{?}{\equiv} v$,

- **A-t-on gagné maintenant?** toujours pas...
- **Problème** $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ **ramené à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, **pas** (encore) **à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv^+} v$.

- **A-t-on gagné maintenant?** toujours pas...
- **Problème** $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ **ramené à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, **pas** (encore) **à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv}^+ v$.

Question 2 : Pour v, v' **positifs,**
quel rapport entre $v \equiv v'$ **et** $v \equiv^+ v'$ **?**

- **A-t-on gagné maintenant?** toujours pas...
- **Problème** $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ **ramené à** $\boldsymbol{\Delta_n^p} \stackrel{?}{\equiv} v$**, pas** (encore) **à** $\boldsymbol{\Delta_n^p} \stackrel{?}{\equiv^+} v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?

- **A-t-on gagné maintenant?** toujours pas...
- **Problème** $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ **ramené à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, **pas** (encore) **à** $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv}^+ v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?
  Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

- A-t-on gagné maintenant? toujours pas...
- Problème $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ ramené à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, pas (encore) à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv}^+ v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?
Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs à droite,

- A-t-on gagné maintenant? toujours pas...
- Problème $w \overset{?}{\equiv} \varepsilon$ ramené à $\Delta_n^p \overset{?}{\equiv} v$, pas (encore) à $\Delta_n^p \overset{?}{\equiv^+} v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs, quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ? Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs à droite, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

- A-t-on gagné maintenant? toujours pas...
- Problème $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ ramené à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, pas (encore) à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv^+} v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?
Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs à droite, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$\uparrow$
les relations $\equiv_R^+$ et $\equiv_R$ sont équivalentes

- A-t-on gagné maintenant? toujours pas...
- Problème $w \overset{?}{\equiv} \varepsilon$ ramené à $\Delta_n^p \overset{?}{\equiv} v$, pas (encore) à $\Delta_n^p \overset{?}{\equiv}^+ v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?
Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs à droite, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

↑

les relations $\equiv_R^+$ et $\equiv_R$ sont équivalentes

- Démonstration : Le groupe $\langle S \mid R \rangle$ est alors
groupe de fractions du monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$, cf. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$. $\square$

- A-t-on gagné maintenant? toujours pas...
- Problème $w \stackrel{?}{\equiv} \varepsilon$ ramené à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv} v$, pas (encore) à $\Delta_n^p \stackrel{?}{\equiv}^+ v$.

Question 2 : Pour v, v' positifs,
quel rapport entre $v \equiv v'$ et $v \equiv^+ v'$?

- Certainement, $w \equiv^+ w'$ entraîne $w \equiv w'$; mais réciproquement ?
Penser à $\langle a, b, c \mid ab = ac \rangle^+$...

Théorème (Ore) : Si le monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$ est simplifiable et admet des multiples communs à droite, il se plonge dans le groupe $\langle S \mid R \rangle$.

$\uparrow$
les relations $\equiv_R^+$ et $\equiv_R$ sont équivalentes

- Démonstration : Le groupe $\langle S \mid R \rangle$ est alors
groupe de fractions du monoïde $\langle S \mid R \rangle^+$, cf. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$. $\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$\uparrow$

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

- Démonstration : Δ_n est multiple de σ_i dans B_n^+ pour tout i,

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.□

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

- Démonstration : Δ_n est multiple de σ_i dans B_n^+ pour tout i, déjà vu : [équivaut à] $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ positif (...)

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$\uparrow$

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

- Démonstration : Δ_n est multiple de σ_i dans B_n^+ pour tout i, déjà vu : [équivaut à] $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ positif (...)

Puis : Δ_n^p est multiple de tout élément de longueur p dans B_n^+. $\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$\uparrow$

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

- Démonstration : Δ_n est multiple de σ_i dans B_n^+ pour tout i,
déjà vu : [équivaut à] $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ positif (...)

Puis : Δ_n^p est multiple de tout élément de longueur p dans B_n^+. $\square$

- Donc : le monoïde B_n^+ satisfait les conditions de Ore,

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ est simplifiable.

$\uparrow$

$axb = ax'b$ entraîne $x = x'$

- Démonstration : Propriétés syntaxiques des relations de tresse.$\square$

Proposition (Garside) : Le monoïde B_n^+ admet des multiples communs.

- Démonstration : Δ_n est multiple de σ_i dans B_n^+ pour tout i, déjà vu : [équivaut à] $\sigma_i^{-1}\Delta_n$ positif (...)

Puis : Δ_n^p est multiple de tout élément de longueur p dans B_n^+. $\square$

- Donc : le monoïde B_n^+ satisfait les conditions de Ore, et le problème d'isotopie des tresses est décidable.

Une solution

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser **a** $= \sigma_1$, **b** $= \sigma_2$... **A** $= \sigma_1^{-1}$...,

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa}$

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},

- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$

$$\equiv (\mathtt{ba}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ba}).\mathtt{bbaa}.$$

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$

$$\equiv (\mathtt{ba}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ba}).\mathtt{bbaa}.$$

- (ii) $(\mathtt{aba})^4 \equiv^+ \mathtt{baababbabbaa}$?

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$
  $\equiv (\mathtt{ba}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ba}).\mathtt{bbaa}$.
- (ii) $(\mathtt{aba})^4 \equiv^+ \mathtt{baababbabbaa}$? ... non (?), donc $w \not\equiv \varepsilon$.

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$
  $\equiv (\mathtt{ba}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ba}).\mathtt{bbaa}$.
- (ii) $(\mathtt{aba})^4 \equiv^+ \mathtt{baababbabbaa}$? ... non (?), donc $w \not\equiv \varepsilon$.

- **Complexité** (très) exponentielle : calamiteux en pratique.

Algorithme : Partant de w à n brins et p lettres σ_i^{-1},
- (i) Calculer v positif vérifiant $\Delta_n^p.w \equiv v$;
- (ii) Alors $w \equiv \varepsilon$ si et seulement si $\Delta_n^p \equiv^+ v$.

Exemple : $w = \sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$.

Poser $\mathtt{a} = \sigma_1$, $\mathtt{b} = \sigma_2$... $\mathtt{A} = \sigma_1^{-1}$..., d'où $w = \mathtt{BBAAbbaa}$.

- (i) $\Delta_3^4.w = \Delta_3^4.\mathtt{BBAAbbaa} \equiv (\mathtt{B}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{A}\Delta_3).(\mathtt{B}\Delta_3).\mathtt{bbaa}$
$\equiv (\mathtt{ba}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ab}).(\mathtt{ba}).\mathtt{bbaa}$.
- (ii) $(\mathtt{aba})^4 \equiv^+ \mathtt{baababbabbaa}$? ... non (?), donc $w \not\equiv \varepsilon$.

- **Complexité** (très) exponentielle : calamiteux en pratique.
- Pour l'exemple, il suffit de décider $\sigma_1^2\sigma_2^2 \equiv^+ \sigma_2^2\sigma_1^2$:
équivalence certainement fausse, car aucune relation ne s'applique.

Solution : Groupe de fractions

Solution : Groupe de fractions

- **Domaine : algèbre**

Solution : Groupe de fractions

- **Domaine :** algèbre
- **Point de vue :** tresse = fraction

Solution : Groupe de fractions

- **Domaine :** algèbre
- **Point de vue :** tresse = fraction
- **Méthode :** énumération exhaustive

Solution : Groupe de fractions

- Domaine : algèbre
- Point de vue : tresse = fraction
- Méthode : énumération exhaustive
- Auteur : Garside '67

Solution : Groupe de fractions

- Domaine : algèbre
- Point de vue : tresse = fraction
- Méthode : énumération exhaustive
- Auteur : Garside ’67
- Mots-clés : monoïde, théorème de Ore

Solution : Groupe de fractions

- **Domaine :** algèbre
- **Point de vue :** tresse = fraction
- **Méthode :** énumération exhaustive
- **Auteur :** Garside ’67
- Mots-clés : monoïde, théorème de Ore
- Arrière-plan : propriétés spécifiques des tresses Δ_n

Solution : Groupe de fractions

- Domaine : algèbre
- Point de vue : tresse = fraction
- Méthode : énumération exhaustive
- Auteur : Garside '67
- Mots-clés : monoïde, théorème de Ore
- Arrière-plan : propriétés spécifiques des tresses Δ_n
- Extensions : groupes de Garside

Solution : Groupe de fractions

- Domaine : algèbre
- Point de vue : tresse = fraction
- Méthode : énumération exhaustive
- Auteur : Garside '67
- Mots-clés : monoïde, théorème de Ore
- Arrière-plan : propriétés spécifiques des tresses Δ_n
- Extensions : groupes de Garside

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.
- Elle est simple, mais très inefficace en pratique.

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.
- Elle est simple, mais très inefficace en pratique.

Peut-on faire autre chose ?

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.
- Elle est simple, mais très inefficace en pratique.

Peut-on faire autre chose ? Peut-on faire mieux ?

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.
- Elle est simple, mais très inefficace en pratique.

Peut-on faire autre chose ? Peut-on faire mieux ?

— Fin de la partie 1 —

- On a obtenu une solution au problème d'isotopie des tresses.
- Elle est simple, mais très inefficace en pratique.

Peut-on faire autre chose ? Peut-on faire mieux ?

— Fin de la partie 1 —