

Cantor et les infinis

Plan

Plan

1. Une petite note et deux résultats tout simples...

Plan

1. Une petite note et deux résultats tout simples...

2. L'héritage (1) : les ordinaux transfinis

Plan

1. Une petite note et deux résultats tout simples...

2. L'héritage (1) : les ordinaux transfinis

3. L'héritage (2) : le problème du continu

1. Une petite note et deux résultats tout simples...



Georg Cantor

- **1845** : naissance à Saint-Petersbourg;
- 1856 : retour à Wiesbaden puis Francfort ; lycée de Darmstadt, puis de Zurich;
- 1863 : université de Berlin;
- 1869 : diplôme en théorie des nombres, et poste à l'université de Halle.
- 1870 : résout le problème d'unicité
de la représentation d'une fonction par **série trigonométrique**.



Georg Cantor

- **1845** : naissance à Saint-Petersbourg;
- **1856** : retour à Wiesbaden puis Francfort ; lycée de Darmstadt, puis de Zurich;
- **1863** : université de Berlin;
- **1869** : diplôme en théorie des nombres, et poste à l'université de Halle.
- **1870** : résout le problème d'unicité
de la représentation d'une fonction par **série trigonométrique**.
- **1872** : correspondance avec Richard Dedekind sur les questions de **numérotabilité**.



Georg Cantor

- **1845** : naissance à Saint-Petersbourg;
- **1856** : retour à Wiesbaden puis Francfort ; lycée de Darmstadt, puis de Zurich;
- **1863** : université de Berlin;
- **1869** : diplôme en théorie des nombres, et poste à l'université de Halle.
- **1870** : résout le problème d'unicité
de la représentation d'une fonction par **série trigonométrique**.
- **1872** : correspondance avec Richard Dedekind sur les questions de **numérotabilité**.
- **1873** (7 décembre) : lettre à Dedekind...

...et article en 1874 (*Journal de Crellé*) :

«Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen».

«Sur une propriété de la collection de tous les nombres réels algébriques»

III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

I. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[*Verles Journal f. Mathematik* Bd. 71, S. 258–265 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht trivialen Gleichung von der Form genügt:

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad (1)$$

wo n, a_0, a_1, \dots, a_n ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_n positiv, die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω , welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat denselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendwenn gedachten Zahl ω unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen, um so auffälliger dürfte daher für das erste Achsel die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν , welcher durch das Zeichen (ν) ausgedeutet werde, einseitig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen guetmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots \quad (2)$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch des zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genaugen, wenn ich in §1 denjenigen Anordnungsmodus mittelst, welcher, wie mir scheint die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt

Urn von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

L'article de 1874
(ici dans les œuvres complètes)

- De quoi parle l'article de Cantor?

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs

● 0 ○ 1 ● 2 ○ 3 ● 4 ○ 5 ● 6 ○ 7 ● 8 ...

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs

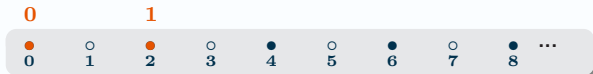
0

0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

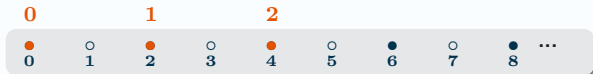
- Exemple 1 : les entiers pairs



- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

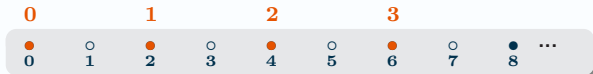
- Exemple 1 : les entiers pairs



- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

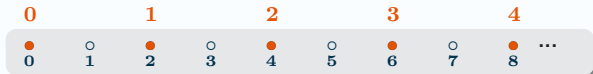
- Exemple 1 : les entiers pairs



- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

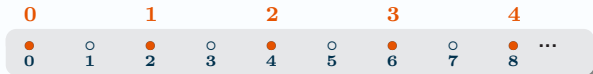
- Exemple 1 : les entiers pairs



- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs

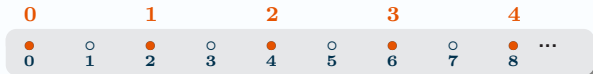


trop facile !

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



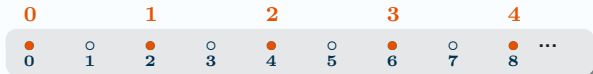
trop facile !

- Exemple 2 : les entiers relatifs

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

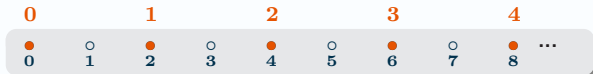
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

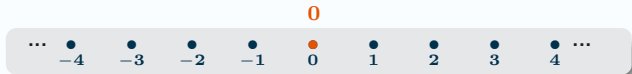
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

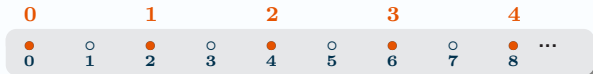
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

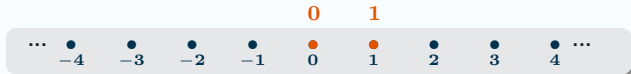
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

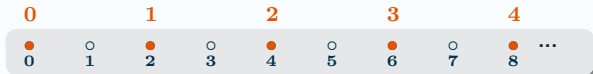
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

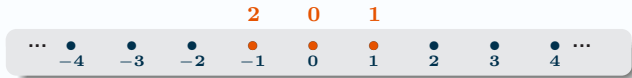
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

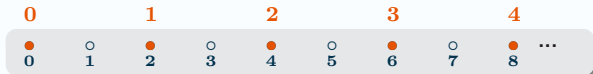
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

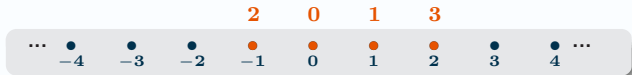
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

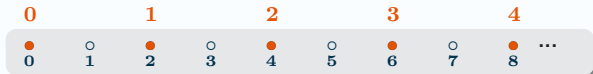
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

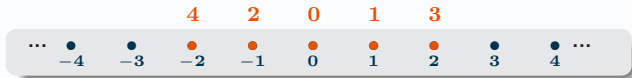
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

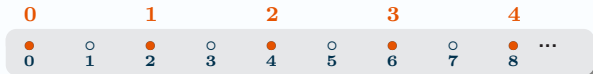
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

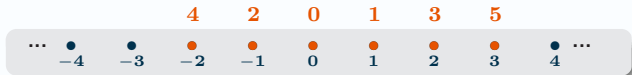
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

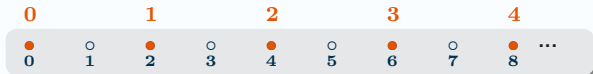
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

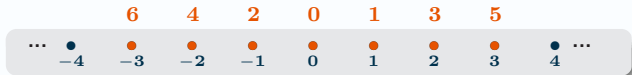
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

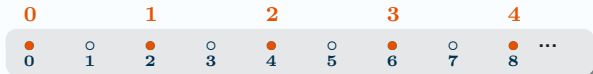
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

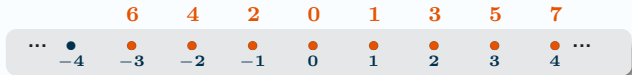
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

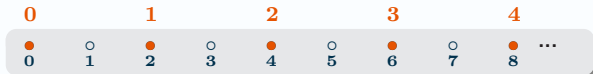
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

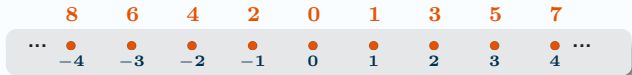
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

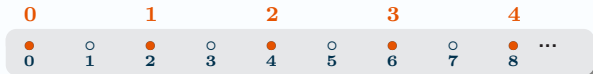
- Exemple 2 : les entiers relatifs



- De quoi parle l'article de Cantor?

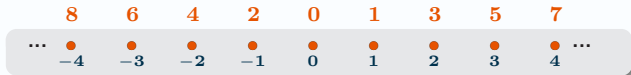
De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs



trop facile !

- Exemple 2 : les entiers relatifs



astucieux...

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

$\overset{\bullet}{1}/1$ $\overset{\bullet}{2}/1$ $\overset{\bullet}{3}/1$ $\overset{\bullet}{4}/1$ $\overset{\bullet}{5}/1$...

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

$$\begin{array}{cccccc} \overset{\bullet}{1}/1 & \overset{\bullet}{2}/1 & \overset{\bullet}{3}/1 & \overset{\bullet}{4}/1 & \overset{\bullet}{5}/1 & \dots \\ \overset{\bullet}{1}/2 & \overset{\bullet}{2}/2 & \overset{\bullet}{3}/2 & \overset{\bullet}{4}/2 & \overset{\bullet}{5}/2 & \dots \end{array}$$

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

$\overset{\bullet}{1/1}$ $\overset{\bullet}{2/1}$ $\overset{\bullet}{3/1}$ $\overset{\bullet}{4/1}$ $\overset{\bullet}{5/1}$...

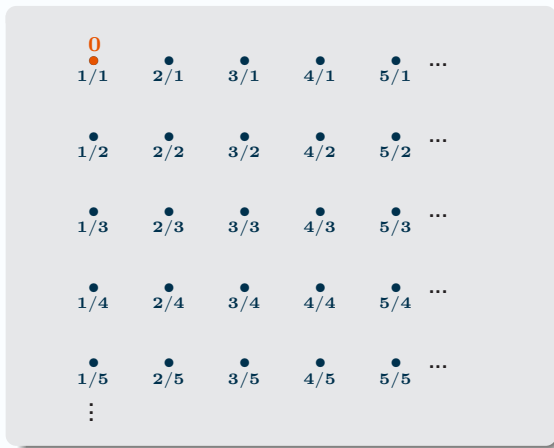
$\overset{\bullet}{1/2}$ $\overset{\bullet}{2/2}$ $\overset{\bullet}{3/2}$ $\overset{\bullet}{4/2}$ $\overset{\bullet}{5/2}$...

$\overset{\bullet}{1/3}$ $\overset{\bullet}{2/3}$ $\overset{\bullet}{3/3}$ $\overset{\bullet}{4/3}$ $\overset{\bullet}{5/3}$...

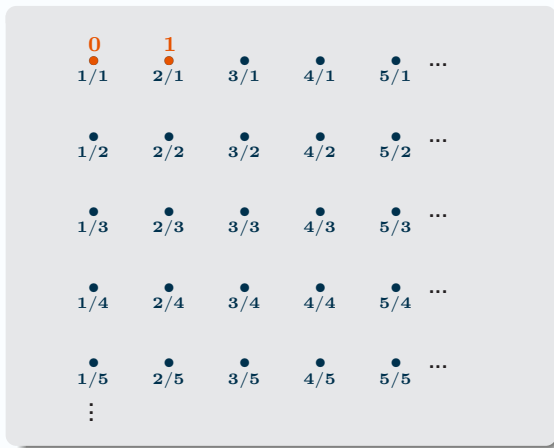
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$...
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$...
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$...
⋮					

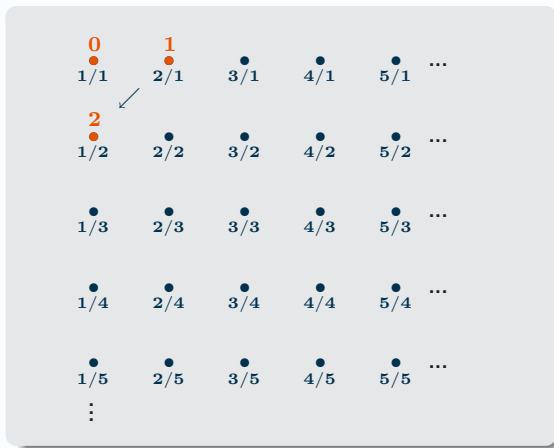
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



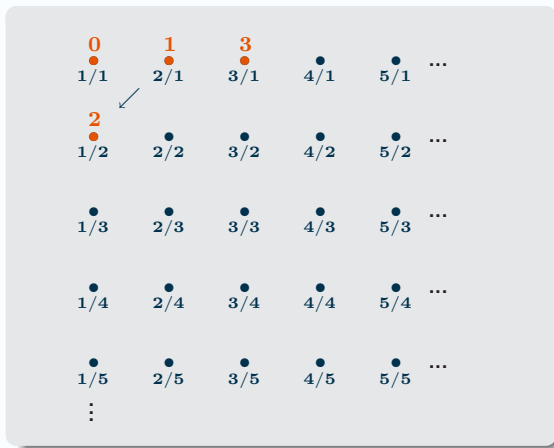
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



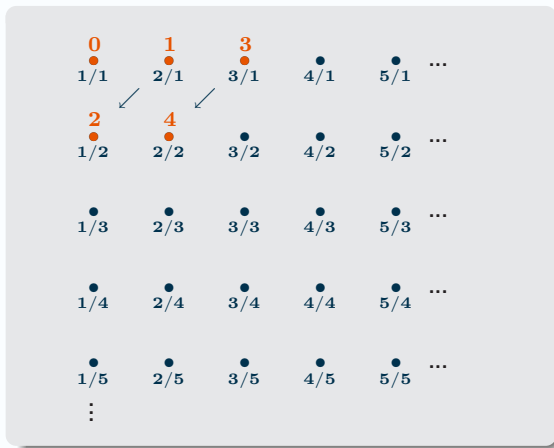
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



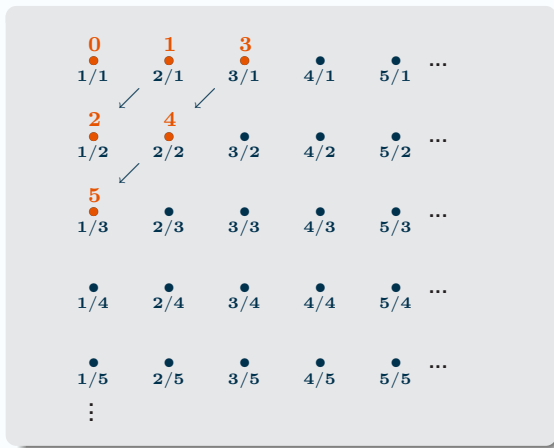
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



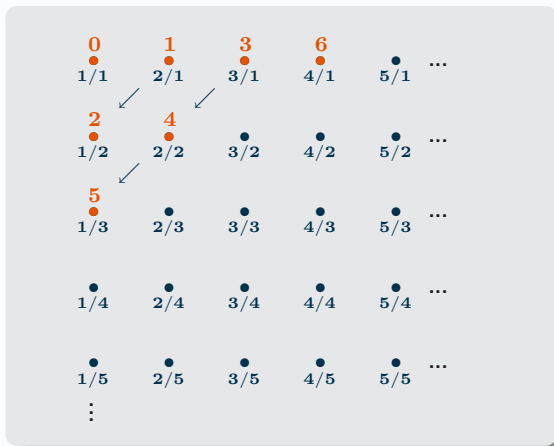
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



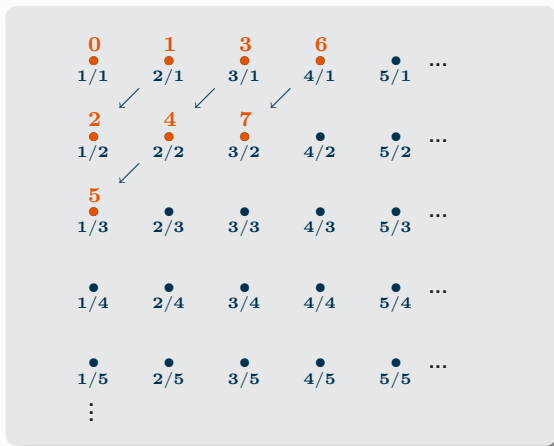
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



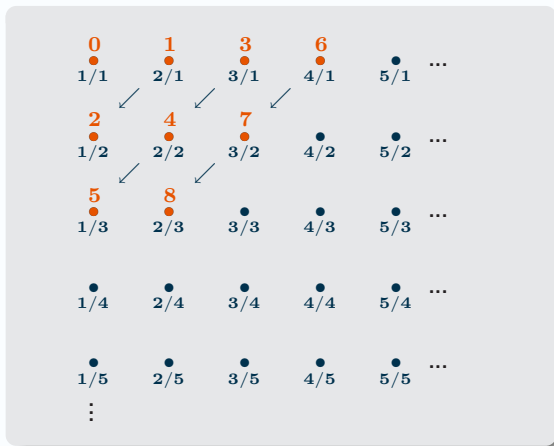
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



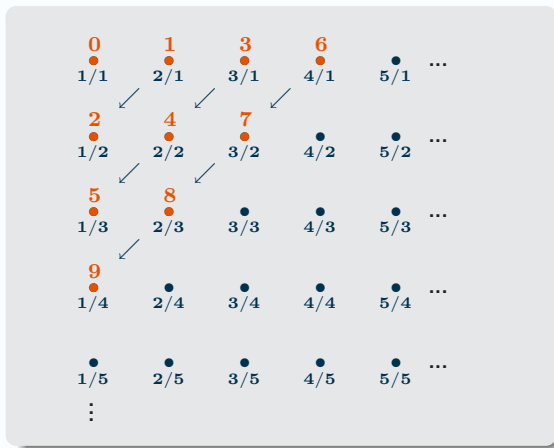
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



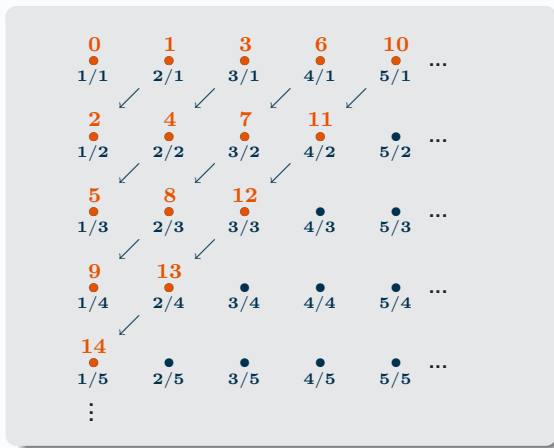
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



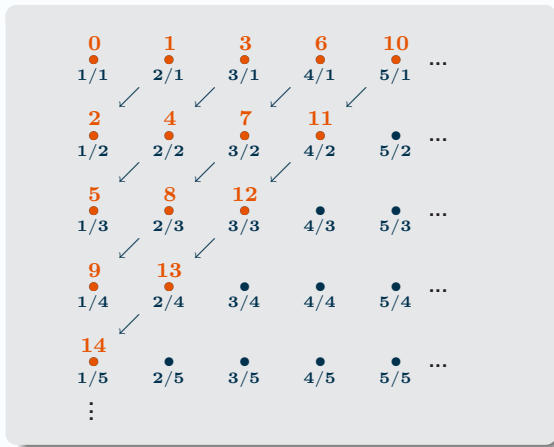
- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs

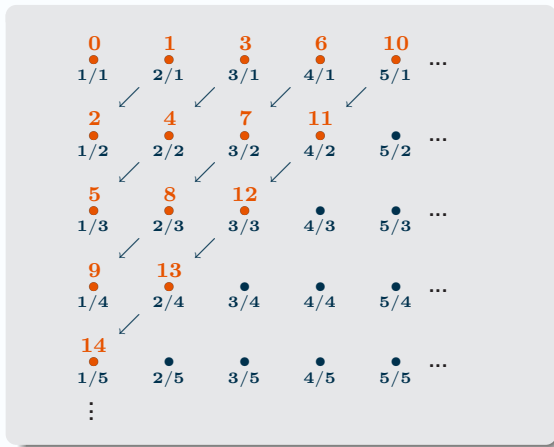


- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



très astucieux ;

- Exemple 3 : les nombres rationnels positifs



très astucieux ; autre solution : donner à $\frac{p}{q}$ le numéro $2^p(2q + 1)$.

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.
- Exemple: les entiers,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.
- Exemple: les entiers, les rationnels,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.
- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.
- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.
- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- Démonstration : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

- Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,
donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h .

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,
donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h .

Pour numéroter (= énumérer) tous les nombres réels algébriques :

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,
donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h .

Pour numéroter (= énumérer) tous les nombres réels algébriques :

- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent **2**,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,
donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h .

Pour numéroter (= énumérer) tous les nombres réels algébriques :

- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent **2**, puis
- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent **3**,

- **Définition** : Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- Exemple: les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\quad}$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor)** : On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration** : Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h

s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h .

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$,
qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h , il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h ,
donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h .

Pour numéroter (= énumérer) tous les nombres réels algébriques :

- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent **2**, puis
- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent **3**, etc. □

- **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numérotter les nombres réels.

- **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numérotter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;

- **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numérotter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \quad (*)$$

On procède par récurrence.

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \quad (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \quad (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;
- ou bien il existe un tel n , et on pose $n_{i+1} =$ le plus petit tel n .

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;
- ou bien il existe un tel n , et on pose $n_{i+1} =$ le plus petit tel n .

Si on n'a pas échoué en route, on a obtenu (*).

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;
- ou bien il existe un tel n , et on pose $n_{i+1} =$ le plus petit tel n .

Si on n'a pas échoué en route, on a obtenu (*). Mézamor, comme $(\mathbb{R}, <)$ est **complet**,
il existe un réel α coincé entre les deux demi-suites :

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}$$

• **Théorème 2 (Cantor)** : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

- **Démonstration** : Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n .

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \dots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geq 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;
- ou bien il existe un tel n , et on pose $n_{i+1} =$ le plus petit tel n .

Si on n'a pas échoué en route, on a obtenu (*). Mézamor, comme $(\mathbb{R}, <)$ est **complet**,
il existe un réel α coincé entre les deux demi-suites :

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \dots < \alpha < \dots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}$$

et on déduit facilement $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n . \square

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, **pas** objet d'étude mathématique.

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration,

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, **pas** objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

Il existe plusieurs infinis différents :

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

Il existe plusieurs infinis différents :
l'infini de \mathbb{R} n'est pas l'infini de \mathbb{N} .

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

Il existe plusieurs infinis différents :
l'infini de \mathbb{R} n'est pas l'infini de \mathbb{N} .

- Point de naissance de la théorie mathématique de l'infini,

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au X^{ème} siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

Il existe plusieurs infinis différents :
l'infini de \mathbb{R} n'est pas l'infini de \mathbb{N} .

- Point de naissance de la théorie mathématique de l'infini,
qui deviendra la **théorie des ensembles** à la fin du XIX^{ème} siècle et au XX^{ème}.

- Avant Cantor (et depuis l'Antiquité) :

infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
comme Thâbit bin Qurrâ au X^{ème} siècle :
autant d'entiers pairs que d'entiers.
mais ni **définition** de l'infini
ni **démonstration** sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et **établit** le premier **théorème** sur l'infini :

Il existe plusieurs infinis différents :
l'infini de \mathbb{R} n'est pas l'infini de \mathbb{N} .

- Point de naissance de la théorie mathématique de l'infini,
qui deviendra la **théorie des ensembles** à la fin du XIX^{ème} siècle et au XX^{ème}.
- Le titre de l'article de Cantor met en avant le résultat positif (mineur),
plus que le résultat négatif (aujourd'hui majeur) : peur du rejet ?

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999....) :

$$\alpha_0 = \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots$$

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999....) :

$$\begin{array}{r} \alpha_0 = \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 = \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \end{array}$$

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999....) :

$$\begin{array}{l} \alpha_0 = \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 = \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 = \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ \dots \end{array}$$

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$,

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{array}{r} \alpha_0 = \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 = \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 = \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ \dots \end{array}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

- Alors, quel que soit n , on a $\alpha \neq \alpha_n$:

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

- Alors, quel que soit n , on a $\alpha \neq \alpha_n$:
- le n -ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$,

Une **autre** démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n .
- Pour chaque n , considérons les développements décimaux de $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
(s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999...):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \dots, \overline{a_{0,0}} \overline{a_{0,1}} \overline{a_{0,2}} \dots \\ \alpha_1 &= \dots, \overline{a_{1,0}} \overline{a_{1,1}} \overline{a_{1,2}} \dots \\ \alpha_2 &= \dots, \overline{a_{2,0}} \overline{a_{2,1}} \overline{a_{2,2}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

et considérons le réel

$$\alpha = 0, \overline{a_{0,0}^\#} \overline{a_{1,1}^\#} \overline{a_{2,2}^\#} \dots,$$

où on a posé $0^\# = 1$, et $1^\# = 2^\# = \dots = 9^\# = 0$.

- Alors, quel que soit n , on a $\alpha \neq \alpha_n$:
 - le n -ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$,
 - le n -ième chiffre du développement de α est $a_{n,n}^*$, qui n'est pas $a_{n,n}$. □

2. L'héritage (1) : les ordinaux transfinis

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers,

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*),

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers :

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers : ω ;

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers : ω ;

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que ω : $\omega+1$;

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers : ω ;

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que ω : $\omega+1$;

il doit exister un plus petit ordinal plus grand que $\omega+1$: $\omega+2$;

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

↪ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. (*)

les ordinaux



- **Théorème (Cantor)** : Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à (*), et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers :	ω ;
Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que ω :	$\omega+1$;
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que $\omega+1$:	$\omega+2$;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega+n$:	$\omega \cdot 2$;
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que $\omega \cdot 2$:	$\omega \cdot 2 + 1$;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega \cdot 2 + n$:	$\omega \cdot 3$;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega \cdot n$:	ω^2 ;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega^2 \cdot n$:	ω^3 ;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les ω^n :	ω^ω ;
...	
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les ω^{ω^n} :	ω^{ω^ω} , etc.

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$\begin{aligned} 26 &= 2^4 + 2^3 + 2^1 && \leftarrow \text{écriture en base 2} \\ &= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \end{aligned}$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}}$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}} \quad 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}} \quad 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}} \quad 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}} \quad 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :

d

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \xrightarrow{T_{2,3}} \quad 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :

$$d \xrightarrow{T_{2,3}} \dots$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :

$$d \xrightarrow{T_{2,3}} \dots \xrightarrow{-1} \dots$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

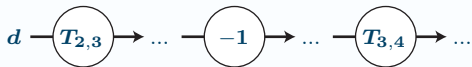
$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

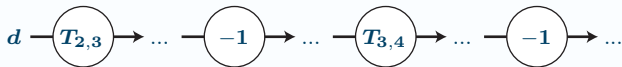
$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Par exemple, partant de **26** :

26,

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Par exemple, partant de **26** :

$$26, \quad 7.625.597.485.071,$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Par exemple, partant de **26** :

$$26, \quad 7.625.597.485.071, \quad 7.625.597.485.070,$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2}$$

$$= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base 2 itérée}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$



- **Suite de Goodstein** partant de d :



- Par exemple, partant de **26** :

$$26, \quad 7.625.597.485.071, \quad 7.625.597.485.070, \quad \dots$$

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.

- Théorème (Goodstein, 1942) :

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante :

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément.

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
 - **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.
- Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :

d

- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



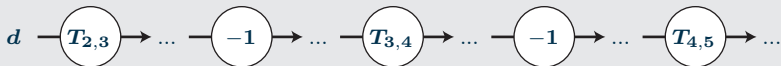
- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



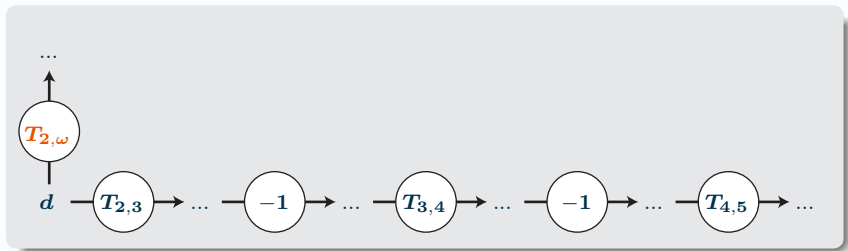
- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0 .
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



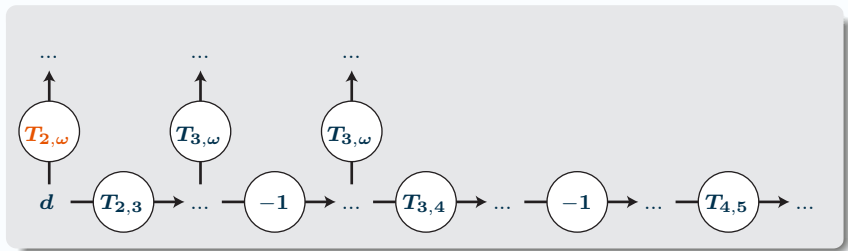
- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



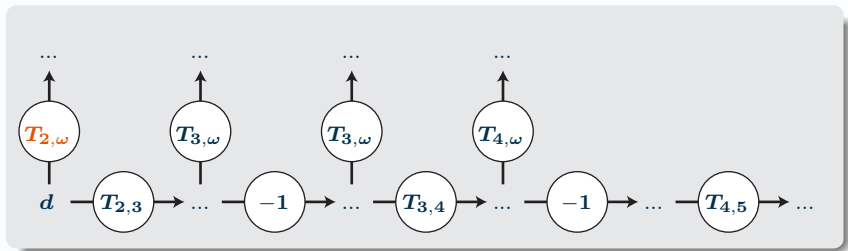
- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



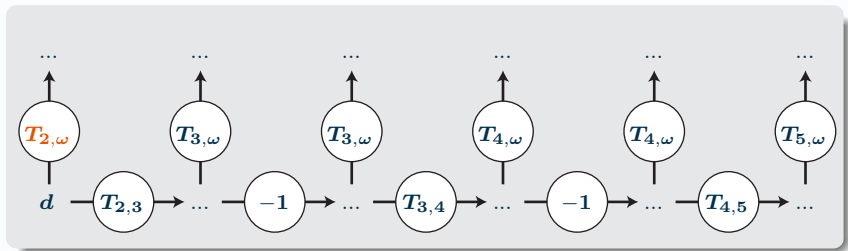
- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.
- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

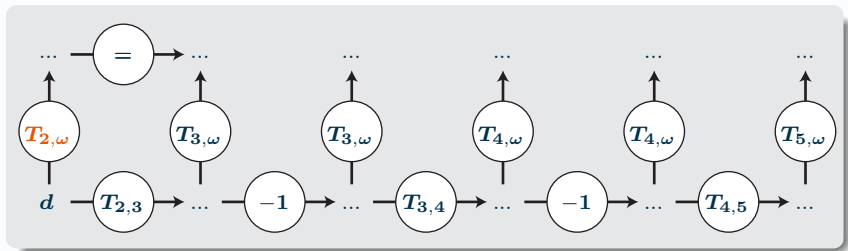
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

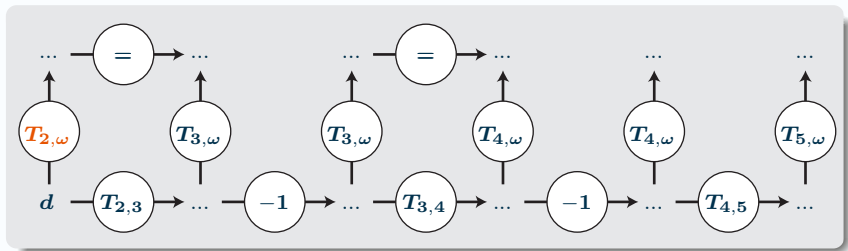
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

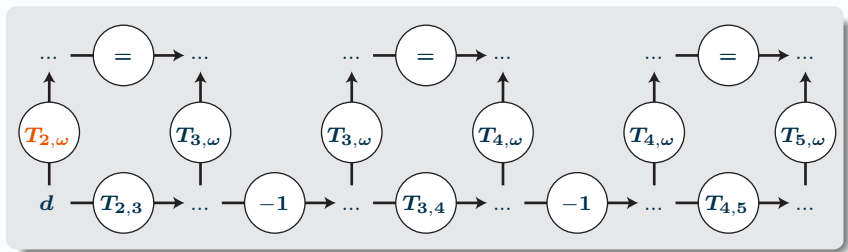
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

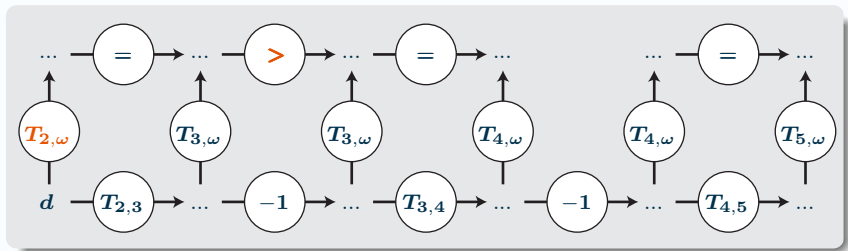
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

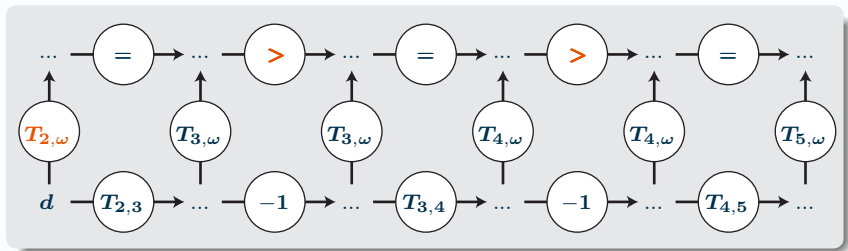
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

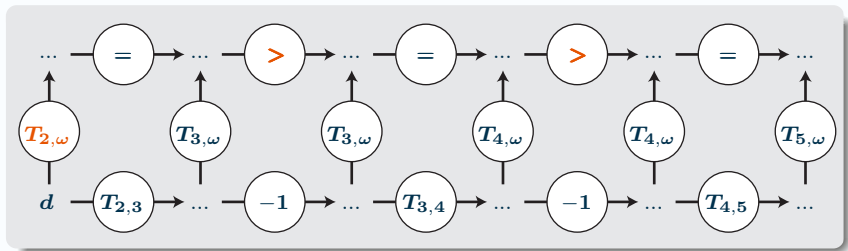
Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



- **Théorème (Goodstein, 1942)** : Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- **Démonstration**: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



Si la suite de Goodstein était infinie,

- Point essentiel de la démonstration : ω domine tous les entiers à la fois.

- Point essentiel de la démonstration : ω domine **tous** les entiers à la fois.

distinction entre infini « **potentiel** » et infini « **actuel** »

- Point essentiel de la démonstration : ω domine **tous** les entiers à la fois.

distinction entre infini « **potentiel** » et infini « **actuel** »

\mathbb{N} et son arithmétique



les ordinaux et leur arithmétique



- Point essentiel de la démonstration : ω domine **tous** les entiers à la fois.

distinction entre infini « **potentiel** » et infini « **actuel** »

\mathbb{N} et son arithmétique



les ordinaux et leur arithmétique



- Tout cela est-il bien **raisonnable** ?

- Point essentiel de la démonstration : ω domine **tous** les entiers à la fois.

distinction entre infini « **potentiel** » et infini « **actuel** »

\mathbb{N} et son arithmétique

les ordinaux et leur arithmétique

- Tout cela est-il bien **raisonnable** ?



Oui, pour le (hardi) Hilbert,
Cantor = ange du Paradis

Non, pour le (prudent) Kronecker.
Cantor = suppôt du Démon

La longueur de la suite de Goodstein
partant de 4 est $3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 2 \dots$

- Aujourd'hui : vue plus claire (et pacifiée) des bases axiomatiques (= règles du jeu).

• **Théorème (Kirby-Paris, 1982)**: Le théorème de Goodstein n'est pas démontrable à partir des axiomes de l'arithmétique de Peano (\approx non démontrable par récurrence).

- Point essentiel de la démonstration : ω domine **tous** les entiers à la fois.

distinction entre infini « **potentiel** » et infini « **actuel** »

\mathbb{N} et son arithmétique

les ordinaux et leur arithmétique

- Tout cela est-il bien **raisonnable** ?



Oui, pour le (hardi) Hilbert,
Cantor = ange du Paradis

Non, pour le (prudent) Kronecker.
Cantor = suppôt du Démon

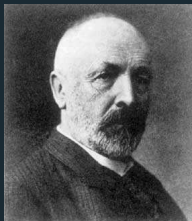
La longueur de la suite de Goodstein partant de 4 est $3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 2 \dots$

- Aujourd'hui : vue plus claire (et pacifiée) des bases axiomatiques (= règles du jeu).

• **Théorème (Kirby-Paris, 1982)**: Le théorème de Goodstein n'est pas démontrable à partir des axiomes de l'arithmétique de Peano (\approx non démontrable par récurrence).

- Ordinaux : outil standard, mais assez peu utilisé, sauf en logique et en informatique théorique, où ils sont fondamentaux.

3. L'héritage (2) : le problème du continu



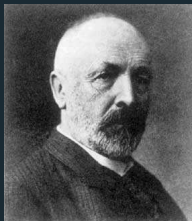
Georg Cantor

- 1877 (trente-deux ans) : Pose

le **problème du continu**,

et énonce l'**hypothèse du continu** qu'il croit en être la solution.

Il en cherchera une démonstration pendant tout le reste de sa vie.



Georg Cantor

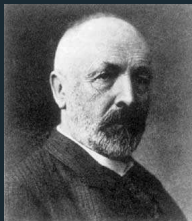
- 1877 (trente-deux ans) : Pose

le **problème du continu**,

et énonce l'**hypothèse du continu** qu'il croit en être la solution.

Il en cherchera une démonstration pendant tout le reste de sa vie.

- 1884 et suivantes : Accès de dépression,



Georg Cantor

- 1877 (trente-deux ans) : Pose le **problème du continu**, et énonce l'**hypothèse du continu** qu'il croit en être la solution. Il en cherchera une démonstration pendant tout le reste de sa vie.
- 1884 et suivantes : Accès de dépression, polémiques scientifiques (Kronecker, Mittag-Leffler) — ne parviendra jamais à obtenir un poste à Berlin.

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration :

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque.

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$, donc $a \in f(a)$,

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$, donc $a \in f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in A \setminus f(a)$).

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

• **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$, donc $a \in f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in A \setminus f(a)$).
Donc f non surjective.

- Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :

Étudier (comparer) les **tailles** (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis \rightsquigarrow théorie des cardinaux infinis \neq théorie des ordinaux infinis
- Formaliser $\text{card}(A) = \text{card}(B)$ comme «il existe une bijection de A sur B »,
et $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ comme «il existe une injection de A dans B ».

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une **infinité** d'infinis deux à deux distincts.

- Démonstration : Soit $f : E \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$, donc $a \in f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in A \setminus f(a)$).
Donc f non surjective. De là, \mathbb{N} , $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$... ont des cardinalités distinctes.

□

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est $\text{card}(\mathbb{R})$?

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est $\text{card}(\mathbb{R})$? (= Combien y a-t-il de réels ?)

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est $\text{card}(\mathbb{R})$? (= Combien y a-t-il de réels ?)

- Le théorème de non-numérotabilité de 1874 montre $\text{card}(\mathbb{R}) > \text{card}(\mathbb{N})$.

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est $\text{card}(\mathbb{R})$? (= Combien y a-t-il de réels ?)

- Le théorème de non-numérotabilité de 1874 montre $\text{card}(\mathbb{R}) > \text{card}(\mathbb{N})$.

- **Hypothèse du continu** (Cantor, 1877) :

Tout partie infinie de \mathbb{R} est en bijection soit avec \mathbb{N} , soit avec \mathbb{R} .

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est $\text{card}(\mathbb{R})$? (= Combien y a-t-il de réels ?)

- Le théorème de non-numérotabilité de 1874 montre $\text{card}(\mathbb{R}) > \text{card}(\mathbb{N})$.

- **Hypothèse du continu (Cantor, 1877)** :

Tout partie infinie de \mathbb{R} est en bijection soit avec \mathbb{N} , soit avec \mathbb{R} .

↑
c'est-à-dire : $\text{card}(\mathbb{R})$ vient juste après $\text{card}(\mathbb{N})$,
il n'y a aucun infini coincé entre les deux.

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$

telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$

telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux
$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$
telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$ telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$ telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

- Il existe une bijection entre \mathbb{R} et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$,

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$ telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

- Il existe une bijection entre \mathbb{R} et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc entre \mathbb{R} et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$

telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

- Il existe une bijection entre \mathbb{R} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc entre \mathbb{R} et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
On note donc $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$,

- **Théorème (Cantor)** : Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$

telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul \aleph .

- Par exemple, $\text{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel \aleph est $\text{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$$\text{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

- Il existe une bijection entre \mathbb{R} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc entre \mathbb{R} et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
On note donc $\text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$, et l'hypothèse du continu s'écrit aussi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**
Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**

Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

↑
Tout fermé infini est en bijection avec \mathbb{N} ou \mathbb{R} .

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**

Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

↑
Tout fermé infini est en bijection avec \mathbb{N} ou \mathbb{R} .

- Premier problème de la liste de Hilbert au Congrès International de Paris.

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**

Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

↑
Tout fermé infini est en bijection avec \mathbb{N} ou \mathbb{R} .

- Premier problème de la liste de Hilbert au Congrès International de Paris.



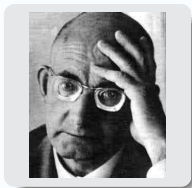
- **Théorème (Alexandroff, 1916) :**

Les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu.

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**
Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

↑
Tout fermé infini est en bijection avec \mathbb{N} ou \mathbb{R} .

- Premier problème de la liste de Hilbert au Congrès International de Paris.



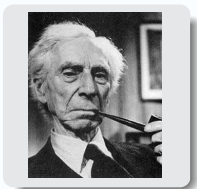
- **Théorème (Alexandroff, 1916) :**
Les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu.

... et puis, plus rien pendant longtemps — et pour cause.

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble ?**

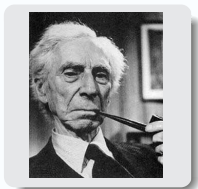
- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- (**Cantor**) : «*n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M .*»

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

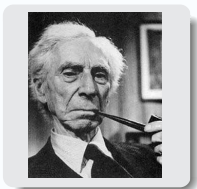
- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble** ?
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles,

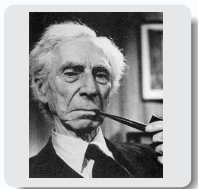
- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble** ?
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles, mais comment ils **fonctionnent** :

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles, mais comment ils **fonctionnent** : fixer les règles du jeu (**axiomes**).

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble** ?
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles, mais comment ils **fonctionnent** : fixer les règles du jeu (**axiomes**).



- 1908 : système de Zermelo.

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble** ?
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles, mais comment ils **fonctionnent** : fixer les règles du jeu (**axiomes**).



- 1908 : système de Zermelo.
- 1922 : système de Zermelo-Fraenkel **ZF**.

- Un problème mal (incomplètement) posé : **qu'est-ce qu'un ensemble** ?
- (**Cantor**) : « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M . »



- **Paradoxe (Russell)** : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...

- Ce qui compte, ce n'est pas ce que **sont** les ensembles, mais comment ils **fonctionnent** : fixer les règles du jeu (**axiomes**).



- 1908 : système de Zermelo.
- 1922 : système de Zermelo-Fraenkel ZF.

↑
objet d'un **consensus** :
« oui, les ensembles, ça fonctionne comme cela »...

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, première question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?



- Théorème (Gödel, 1938) :

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?



- **Théorème (Gödel, 1938)** : Sauf si ZF est contradictoire,

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?



- **Théorème (Gödel, 1938)** : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF .

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?



- **Théorème (Gödel, 1938)** : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.



- **Théorème (Cohen, 1963)** :

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?



- **Théorème (Gödel, 1938)** : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.



- **Théorème (Cohen, 1963)** : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas prouvable à partir de ZF.

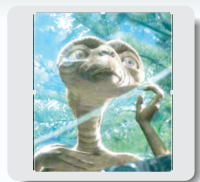
- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...
- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...
- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles
(= de l'infini) ;



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?

L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?

Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?

Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...

- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :

la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles

(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...
- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles
(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :
- Quand on en saura plus, le système **ZF** sera enrichi.



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...
- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles
(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :
- Quand on en saura plus, le système **ZF** sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.



- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?

L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?

Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?

Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...

- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** :

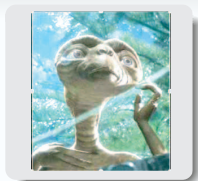
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles

(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

- Quand on en saura plus, le système **ZF** sera enrichi.

...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

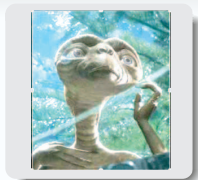


- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système **ZF** n'est qu'un **point de départ** : la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles (= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :
- Quand on en saura plus, le système **ZF** sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.
- Du reste, au chapitre des malentendus...
- **Théorème** (**Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...**) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un **point de départ** :
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles
(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

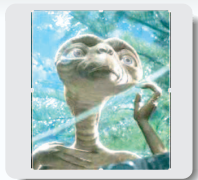
- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- **Théorème** (**Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...**) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

↪ d'où possibilité d'**utiliser** les ensembles comme type fondateur unique.

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un **point de départ** : la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles (= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- **Théorème** (Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

↪ d'où possibilité d'**utiliser** les ensembles comme type fondateur unique.

- **Mais** ce que ne dit **pas** le théorème :

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un **point de départ** : la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles (= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- **Théorème** (Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

↪ d'où possibilité d'**utiliser** les ensembles comme type fondateur unique.

- **Mais** ce que ne dit **pas** le théorème : que les objets **sont** des ensembles.

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un **point de départ** : la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles (= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :
- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- **Théorème** (Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

↪ d'où possibilité d'**utiliser** les ensembles comme type fondateur unique.

- **Mais** ce que ne dit **pas** le théorème : que les objets **sont** des ensembles.

2 n'est pas $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
L'hypothèse du continu n'est-elle **ni vraie, ni fausse** ?
Est-elle d'un mystérieux **troisième type** ?
Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...



- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un **point de départ** :
la formalisation de notre intuition **actuelle** des ensembles
(= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- **Théorème** (Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être **représentés** (= codés) par des ensembles.

↪ d'où possibilité d'**utiliser** les ensembles comme type fondateur unique.

- **Mais** ce que ne dit **pas** le théorème : que les objets **sont** des ensembles.

2 n'est pas $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

tout au moins, personne de sérieux
ne l'a jamais prétendu.

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles
finis

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
~> consensus pour adopter ZF comme système de base

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables**

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)





- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)





- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

- **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

• **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité \aleph_1)



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

• **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité \aleph_1)



- **Théorème (Woodin, 2001)** :



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

• **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité \aleph_1)



• **Théorème (Woodin, 2001)** : Sauf si la Ω -conjecture est fautive, **tout** système incluant ZF+GC et neutralisant le forcing au niveau de \aleph_2 réfute l'hypothèse du continu.



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

• **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité \aleph_1)



• **Théorème (Woodin, 2001)** : Sauf si la Ω -conjecture est fautive, **tout** système incluant ZF+GC et neutralisant le forcing au niveau de \aleph_2 réfute l'hypothèse du continu.

- Est-ce **la** solution du problème ?



- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** («ZF neutralise le forcing au niveau de \aleph_0 »)
 \rightsquigarrow consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes de **grands cardinaux**, notamment détermination projective



- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** («ZF+GC neutralise le forcing au niveau de \aleph_1 »)
 \rightsquigarrow émergence d'un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

• **Théorème (Martin–Steel–Woodin, 1985)** : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité \aleph_1)



• **Théorème (Woodin, 2001)** : Sauf si la Ω -conjecture est fautive, **tout** système incluant ZF+GC et neutralisant le forcing au niveau de \aleph_2 réfute l'hypothèse du continu.

- Est-ce **la** solution du problème ? Pas certain, mais, un jour, il y en aura une...



Georg Cantor



Georg Cantor

- Par sa note de 1874, Cantor a ouvert la porte d'un monde nouveau :
le monde de l'**infini**.
- Il a ensuite largement contribué à explorer ce monde,
avec sa théorie des **ordinaux** et des **cardinaux**.
- Il a reconnu le rôle central du **problème du continu**,
sur lequel il a travaillé en vain pendant des années.
- La théorie de l'infini, ou **théorie des ensembles**, s'est considérablement développée
au XXème siècle, mais le problème du continu n'est toujours pas résolu.



Georg Cantor

- Par sa note de 1874, Cantor a ouvert la porte d'un monde nouveau :
le monde de l'**infini**.
- Il a ensuite largement contribué à explorer ce monde,
avec sa théorie des **ordinaux** et des **cardinaux**.
- Il a reconnu le rôle central du **problème du continu**,
sur lequel il a travaillé en vain pendant des années.
- La théorie de l'infini, ou **théorie des ensembles**, s'est considérablement développée
au XXème siècle, mais le problème du continu n'est toujours pas résolu.
- Il y a des raisons **mathématiques** d'espérer qu'il le soit dans un avenir raisonnable.



Georg Cantor

- Par sa note de 1874, Cantor a ouvert la porte d'un monde nouveau :
le monde de l'**infini**.
- Il a ensuite largement contribué à explorer ce monde,
avec sa théorie des **ordinaux** et des **cardinaux**.
- Il a reconnu le rôle central du **problème du continu**,
sur lequel il a travaillé en vain pendant des années.
- La théorie de l'infini, ou **théorie des ensembles**, s'est considérablement développée
au XXème siècle, mais le problème du continu n'est toujours pas résolu.
- Il y a des raisons **mathématiques** d'espérer qu'il le soit dans un avenir raisonnable.