Cantor et les infinis

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Un bref article (cinq pages) de Georg Cantor paru en 1874
  considère, pour la première fois, l'infini comme objet d'étude mathématique.
- Cet article fonde la théorie des ensembles (théorie de l'infini) et,
  par là, il a influencé toute la vision des mathématiques du XXème siècle.

Plan

1. Une petite note et deux résultats tout simples...

2. L'héritage (1) : les ordinaux transfinis

3. L'héritage (2) : le problème du continu

1. Une petite note et deux résultats tout simples...

Georg Cantor

- 1845 : naissance à Saint-Petersbourg;
- 1856 : retour à Wiesbaden puis Francfort ; lycée de Darmstadt, puis de Zurich;
- 1863 : université de Berlin;
- 1869 : diplôme en théorie des nombres, et poste à l'université de Halle.

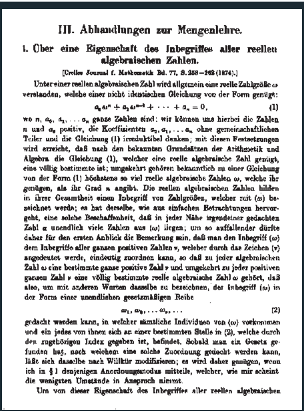
- 1870 : résout le problème d'unicité de la représentation d'une fonction par série trigonométrique.

- 1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur les questions de numérotabilité.

- 1873 (7 décembre) : lettre à Dedekind...

...et article en 1874 (*Journal de Crelle*) **:**
«Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen».

«Sur une propriété de la collection de tous les nombres réels algébriques»



III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 258–262 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$

wo $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \qquad (2)$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in § 1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

L'article de 1874
(ici dans les œuvres complètes)

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME DE TOUS LES NOMBRES ALGÉBRIQUES RÉELS.[1]

PAR

G. CANTOR

à HALLE a. S.

(Traduction d'un mémoire publié d. l. journ. d. Borchardt, t. 77, pag. 258.)

On nomme, en général, *nombre algébrique* réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots . + a_n = 0, \tag{1}$$

où n, a_0, a_1, ... a_n sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients a_0, a_1, ... a_n n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible; ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement à une équation de la forme (1) correspondent au plus autantde nombres algébriques réels racines de cette équation, qu'il y a d'unités dans le degré n.

Les nombres algébriques réels constituent par leur ensemble un système de nombres que nous désignerons par (ω); ainsi qu'il résulte de considérations élémentaires, ce système (ω) de nombres est de telle nature qu'il existe une infinité de nombres de (ω) dont la différence avec un nom-

[1] M. GEORG CANTOR ayant eu la bonté de nous promettre une série d'articles nouveaux concernant ses recherches sur la théorie des ensembles, nous pensons rendre service à nos lecteurs en reproduisant d'abord ici en traduction française les principaux mémoires de M. CANTOR qui se rapportent à ce sujet; ils nous paraissent en effet indispensables à l'intelligence des nouveaux qui vont suivre et que l'auteur publiera de même en français. La traduction a été revue et corrigée par l'auteur. *Le rédacteur.*

Traduction française, parue en 1883 dans *Acta Arithmetica*

- De quoi parle l'article de Cantor?

De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- Exemple 1 : les entiers pairs

0		1		2		3		4	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

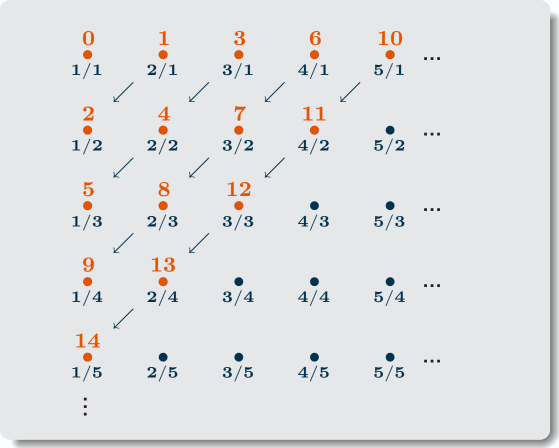
trop facile !

- Exemple 2 : les entiers relatifs

	8	6	4	2	0	1	3	5	7	
...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

astucieux...

- **Exemple 3 : les nombres rationnels positifs**



très astucieux ; autre solution : donner à $\dfrac{p}{q}$ le numéro $2^p(2q+1)$.

- **Définition :** Un nombre réel α est dit **algébrique** s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution.

- **Exemple:** les entiers, les rationnels, les nombres qui s'écrivent avec $\sqrt{\ }$, etc.

- **Théorème 1 (Cantor) :** On peut numéroter les nombres réels algébriques.

- **Démonstration :** Appelons **hauteur** d'une équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'entier $|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| + n$,

et disons qu'un réel algébrique **accepte** h s'il est solution d'au moins une équation de hauteur h.

(Par exemple, $\sqrt{2}$ accepte 5, puisqu'il est solution de $x^2 - 2 = 0$, qui est de hauteur $1 + 0 + 2 + 2$.)

Pour tout h, il n'y a qu'un nombre fini d'équations de hauteur h, donc un nombre fini de réels algébriques acceptant h.

Pour numéroter (= énumérer) tous les nombres réels algébriques :
- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent 2, puis
- numéroter tous les nombres algébriques qui acceptent 3, etc. $\square$

• **Théorème 2 (Cantor) :** On ne peut pas numéroter les nombres réels.

• **Démonstration :** Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ une suite quelconque de réels ;
on va exhiber un réel α vérifiant $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n.

Pour cela, on essaie d'extraire une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \ldots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \quad \ldots\ldots \quad < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \quad (*)$$

On procède par récurrence. Supposons $i \geqslant 1$ et n_i construit. De deux choses l'une :

- ou bien il n'existe pas $n > n_i$ tel que α_n est entre $\alpha_{n_{i-1}}$ et α_{n_i} (strictement),
  et alors on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et on a $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n ;
- ou bien il existe un tel n, et on pose n_{i+1} = le plus petit tel n.

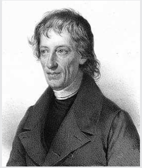
Si on n'a pas échoué en route, on a obtenu $(*)$. Mézalor, comme $(\mathbb{R}, <)$ est complet,
il existe un réel α coincé entre les deux demi-suites :

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \ldots < \alpha < \ldots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}$$

et on déduit facilement $\alpha \neq \alpha_n$ pour tout n. $\square$

- **Avant Cantor** (et depuis l'Antiquité) :

  infini = limite inatteignable, pas objet d'étude mathématique.



- Bolzano vers 1848 note :
  autant de réels dans $[0, 5]$ que dans $[0, 12]$,
  comme Thâbit bin Qurrâ au Xème siècle :
  autant d'entiers pairs que d'entiers.
  mais ni définition de l'infini
  ni démonstration sur l'infini.

- Au contraire, l'article de Cantor de 1874 montre que l'infini peut être objet de démonstration, et établit le premier théorème sur l'infini :

  Il existe plusieurs infinis différents :
  l'infini de $\mathbb{R}$ n'est pas l'infini de $\mathbb{N}$.

- Point de naissance de la théorie mathématique de l'infini,
  qui deviendra la théorie des ensembles à la fin du XIXème siècle et au XXème.

- Le titre de l'article de Cantor met en avant le résultat positif (mineur),
  plus que le résultat négatif (aujourd'hui majeur) : peur du rejet ?

Une autre démonstration de Cantor de la non-numérotabilité des réels (1891)

- Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber α différent de chacun des α_n.

- Pour chaque n, considérons les développements décimaux de α_1, α_2, ...

  (s'il y a ambiguïté : celui qui ne se termine pas par 999....) :

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \ldots,\ a_{0,0}\ a_{0,1}\ a_{0,2}\ \ldots \\
\alpha_1 &= \ldots,\ a_{1,0}\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ \ldots \\
\alpha_2 &= \ldots,\ a_{2,0}\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

et considérons le réel

$$\alpha = \overline{0,\ a^{\#}_{0,0}\ a^{\#}_{1,1}\ a^{\#}_{2,2}\ \ldots},$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$.

- Alors, quel que soit n, on a $\alpha \neq \alpha_n$:
  - le n-ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$,
  - le n-ième chiffre du développement de α est $a^{*}_{n,n}$, qui n'est pas $a_{n,n}$. □

2. L'héritage (1) : les ordinaux transfinis

Georg Cantor

- **1879** (trente-quatre ans) **: professeur à l'université de Halle ;**
- **1879–1884 : série de six articles dans les** *Mathematische Annalen*
  où il explore le monde de l'infini (« théorie des ensembles »),
  et en particulier développe

  la théorie des ordinaux transfinis

- Une fois l'infini considéré comme un monde accessible :

Il doit être possible de compter au-delà du fini.

$\rightsquigarrow$ les nombres (ou ordinaux) transfinis.

- Propriété fondamentale de la suite des nombres entiers (penser à la récurrence) :

Tout ensemble non vide a un plus petit élément. $(*)$

les ordinaux
↓

- **Théorème (Cantor) :** Il existe une unique suite prolongeant la suite des entiers, satisfaisant à $(*)$, et munie d'une arithmétique prolongeant celle des entiers.

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les entiers : ω ;

Il doit exister un plus petit ordinal plus grand que ω : $\omega{+}1$;
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que $\omega{+}1$: $\omega{+}2$;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega{+}n$: $\omega{\cdot}2$;
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que $\omega{\cdot}2$: $\omega{\cdot}2{+}1$;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega{\cdot}2{+}n$: $\omega{\cdot}3$;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega{\cdot}n$: ω^2 ;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les $\omega^2{\cdot}n$: ω^3 ;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les ω^n : ω^ω ;
...
il doit exister un plus petit ordinal plus grand que tous les ω^{ω^n} : ω^{ω^ω}, etc.

- Ecriture d'un entier en base p itérée :

$$\begin{aligned} 26 &= 2^4 + 2^3 + 2^1 && \leftarrow \text{écriture en base } 2 \\ &= 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 && \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée} \end{aligned}$$

- Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$: remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

$$26 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1+1} + 3^1 = 7.625.597.485.071.$$

- Suite de Goodstein partant de d :

$$d \xrightarrow{T_{2,3}} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{T_{3,4}} \dots \xrightarrow{-1} \dots \xrightarrow{T_{4,5}} \dots$$

- Par exemple, partant de 26 :

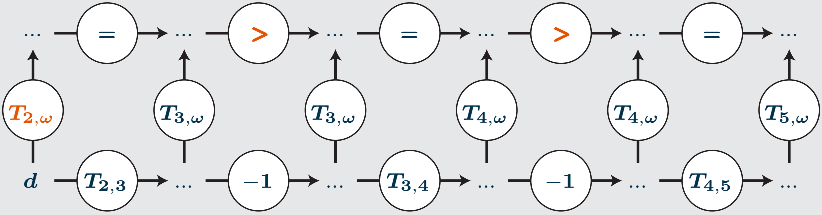
$$26, \quad 7.625.597.485.071, \quad 7.625.597.485.070, \quad \dots$$

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.

- **Théorème** (Goodstein, 1942) : Quel que soit d, la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur 0.

- Démonstration: Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$ n'a pas de plus petit élément.
Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie.

Considérons alors la suite de Goodstein partant de d :



Si la suite de Goodstein était infinie,
alors on aurait une suite infinie d'ordinaux strictement décroissante. □

- **Point essentiel de la démonstration : ω domine tous les entiers à la fois.**

distinction entre infini « potentiel » et infini « actuel »

$\uparrow$ $\mathbb{N}$ et son arithmétique

$\uparrow$ les ordinaux et leur arithmétique

- **Tout cela est-il bien raisonnable ?**

Oui, pour le (hardi) Hilbert,
Cantor $=$ ange du Paradis

Non, pour le (prudent) Kronecker.
Cantor $=$ suppôt du Démon

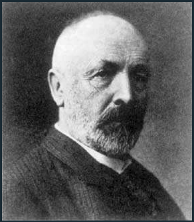
La longueur de la suite de Goodstein partant de 4 est $3 \cdot 2^{402\,653\,211} - 2$...

- **Aujourd'hui : vue plus claire (et pacifiée) des bases axiomatiques (= règles du jeu).**

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982): Le théorème de Goodstein n'est pas démontrable à partir des axiomes de l'arithmétique de Peano ($\approx$ non démontrable par récurrence).**

- **Ordinaux : outil standard, mais assez peu utilisé,**
sauf en logique et en informatique théorique, où ils sont fondamentaux.

3. L'héritage (2) : le problème du continu



Georg Cantor

- 1877 (trente-deux ans) : Pose le problème du continu,

  et énonce l'hypothèse du continu qu'il croit en être la solution.
  Il en cherchera une démonstration pendant tout le reste de sa vie.
- 1884 et suivantes : Accès de dépression, polémiques scientifiques (Kronecker, Mittag-Leffler) — ne parviendra jamais à obtenir un poste à Berlin.
- 1899 : Mort de son fils, dépressions de plus en plus sévères, internements ;
- 1913 : Retraite de l'université de Halle ;
- 1918 (soixante-douze ans) : Mort à Halle.

- **Deuxième direction de recherche quand l'infini devient objet d'exploration :**

Étudier (comparer) les tailles (cardinalités) des ensembles (infinis).

- Ordonner et dénombrer sont équivalents pour les ensembles finis, mais **pas** pour les ensembles infinis $\rightsquigarrow$ **théorie des cardinaux infinis $\neq$ théorie des ordinaux infinis**

- **Formaliser card$(A) =$ card(B) comme «il existe une bijection de A sur B», et card$(A) \leqslant$ card(B) comme «il existe une injection de A dans B».**

- **Théorème (Cantor) : Il existe une infinité d'infinis deux à deux distincts.**

- Démonstration : Soit $f : E \to \mathfrak{P}(E)$ quelconque. Posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

Pour $a \in E$, ou bien $a \in A$, donc $a \notin f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in f(a) \setminus A$)
ou bien $a \notin A$, donc $a \in f(a)$, et donc $f(a) \neq A$ (puisque $a \in A \setminus f(a)$).
Donc f non surjective. De là, $\mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$... ont des cardinalités distinctes.

$\square$

- **Premier** problème de la théorie des ensembles, le **problème du continu** :

Quel infini est card$(\mathbb{R})$? (= Combien y a-t-il de réels ?)

- Le théorème de non-numérotabilité de 1874 montre card$(\mathbb{R}) >$ card$(\mathbb{N})$.

- **Hypothèse du continu** (Cantor, 1877) :
  Tout partie infinie de $\mathbb{R}$ est en bijection soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$.

$\uparrow$

c'est-à-dire : card$(\mathbb{R})$ vient juste après card$(\mathbb{N})$,
il n'y a aucun infini coincé entre les deux.

- **Théorème (Cantor) :** Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux
$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \dots$$
telle que tout ensemble infini a pour cardinalité un et un seul $\aleph$.

- Par exemple, $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Alors le problème du continu devient :

quel $\aleph$ est $\mathrm{card}(\mathbb{R})$?

et l'hypothèse du continu :

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

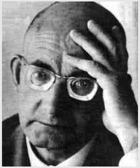
- Il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc entre $\mathbb{R}$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
On note donc $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$, et l'hypothèse du continu s'écrit aussi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- **Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) :**
  Les fermés satisfont à l'hypothèse du continu.

↑
Tout fermé infini est en bijection avec $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$.

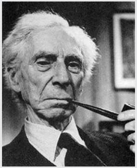
- **Premier problème de la liste de Hilbert au Congrès International de Paris.**



- **Théorème (Alexandroff, 1916) :**
  Les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu.

... et puis, plus rien pendant longtemps — et pour cause.

- **Un problème mal (incomplètement) posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** *«n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M.»*



- **Paradoxe (Russell) : Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor...**

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu (axiomes).**

- **1908 : système de Zermelo.**
- **1922 : système de Zermelo-Fraenkel ZF.**

↑

objet d'un consensus : « oui, les ensembles, ça fonctionne comme cela »...

- Une fois le consensus acquis sur ZF comme point de départ, **première** question :

L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

- **Théorème** (Gödel, 1938) : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.

- **Théorème** (Cohen, 1963) : Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas prouvable à partir de ZF.

- Quelle est la signification des résultats de Gödel et Cohen ?
  L'hypothèse du continu n'est-elle ni vraie, ni fausse ?
  Est-elle d'un mystérieux troisième type ?
  Est-elle inconnaissable ? Vide de sens ? ...

- Pas du tout... le système ZF n'est qu'un point de départ : la formalisation de notre intuition actuelle des ensembles (= de l'infini) ; aucune raison de penser qu'il épuise les propriétés des ensembles :

- Quand on en saura plus, le système ZF sera enrichi.
  ...et alors le problème du continu pourra peut-être être résolu.

- Du reste, au chapitre des malentendus...

- Théorème (Zermelo, Hausdorff, von Neumann, ...) : (Presque) tous les objets mathématiques peuvent être représentés (= codés) par des ensembles.

$\rightsquigarrow$ d'où possibilité d'utiliser les ensembles comme type fondateur unique.

- Mais ce que ne dit pas le théorème : que les objets sont des ensembles.

2 n'est pas $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

tout au moins, personne de sérieux ne l'a jamais prétendu.

- En pratique, ZF fournit une description complète du monde des ensembles **finis** (« ZF neutralise le forcing au niveau de $\aleph_0$ »)

  $\rightsquigarrow$ consensus pour adopter ZF comme système de base

axiomes **de grands cardinaux**, notamment détermination projective

$\downarrow$

- 1965–85: ZF+GC décrit semblablement le monde des ensembles **dénombrables** (« ZF+GC neutralise le forcing au niveau de $\aleph_1$ »)

  $\rightsquigarrow$ émergence d’un consensus pour ajouter GC à ZF comme axiome.

- **Théorème** (Martin–Steel–Woodin, 1985) : Le système ZF+GC prouve que les ensembles projectifs satisfont à l’hypothèse du continu.

- Quid du niveau suivant ? (cardinalité $\aleph_1$)

- **Théorème** (Woodin, 2001) : Sauf si la Ω-conjecture est fausse, **tout** système incluant ZF+GC et neutralisant le forcing au niveau de $\aleph_2$ réfute l’hypothèse du continu.

- Est-ce **la** solution du problème ? Pas certain, mais, un jour, il y en aura une...

Georg Cantor

- Par sa note de 1874, Cantor a ouvert la porte d'un monde nouveau :
  le monde de l'**infini**.
- Il a ensuite largement contribué à explorer ce monde,
  avec sa théorie des **ordinaux** et des **cardinaux**.
- Il a reconnu le rôle central du **problème du continu**,
  sur lequel il a travaillé en vain pendant des années.
- La théorie de l'infini, ou **théorie des ensembles**, s'est considérablement développée au XXème siècle, mais le problème du continu n'est toujours pas résolu.
- Il y a des raisons **mathématiques** d'espérer qu'il le soit dans un avenir raisonnable.

www.math.unicaen.fr/~dehornoy
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/BiogIndex.html