

Distance de rotation entre arbres binaires

Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy



Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen



Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- **Problème:** calculer le diamètre des associaèdres.



Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- **Problème:** calculer le diamètre des associaèdres.
- **Hélas!** pas (complètement) résolu,



Distance de rotation entre arbres binaires

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- **Problème:** calculer le diamètre des associaèdres.
- **Hélas!** pas (complètement) résolu, mais résultats et méthodes nouveaux.

Plan

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

5. Utiliser les noms (suite): la relation effacement

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

5. Utiliser les noms (suite): la relation effacement

$$d(n) \geq \frac{5}{3}n - 4 \text{ pour tout } n$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

5. Utiliser les noms (suite): la relation effacement

$$d(n) \geq \frac{5}{3}n - 4 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{7}{4}n - 5 \text{ pour tout } n$$

Plan

1. Distance de rotation, associaèdres, et triangulations d'un polygone

2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

$$d(n) = 2n - 6 \text{ pour } n \text{ grand}$$

3. Utiliser les positions: lien avec le groupe de Thompson F

$$d(n) \geq n - 1 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

4. Utiliser les noms: la relation de recouvrement

$$d(n) \geq \frac{3}{2}n - 3 \text{ pour tout } n$$

5. Utiliser les noms (suite): la relation effacement

$$d(n) \geq \frac{5}{3}n - 4 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq \frac{7}{4}n - 5 \text{ pour tout } n$$

$$d(n) \geq 2n - 2\sqrt{2n} \text{ pour (tout) } n$$

1. Distance de rotation, associaèdres,
et triangulations d'un polygone

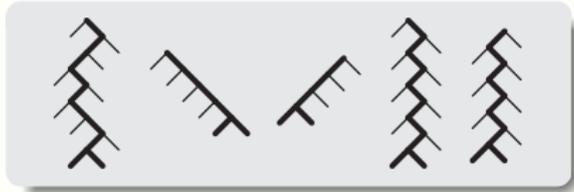
- **Arbre** = arbre binaire

- **Arbre** = arbre binaire fini,

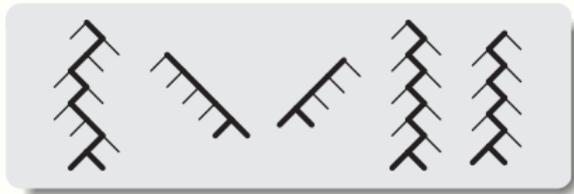
- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné,

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :

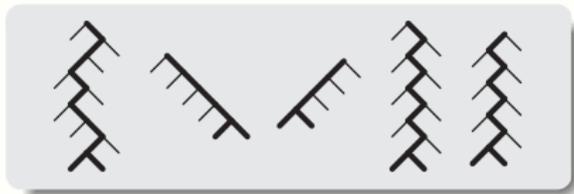


- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



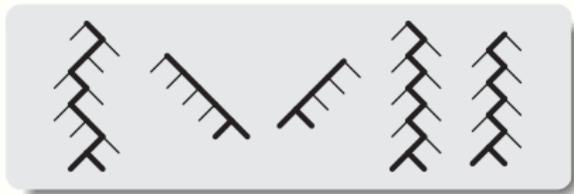
- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles-1;

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles-1;
↪ $\frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ arbres de taille n (n -ième nombre de Catalan).

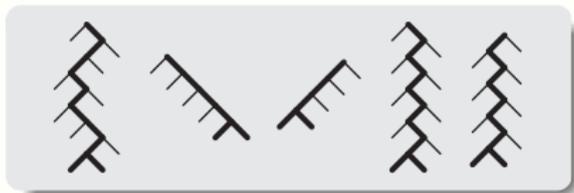
- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles-1;
 $\rightsquigarrow \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ arbres de taille n (n -ième nombre de Catalan).
- Décomposition unique : racine / sous-arbre gauche / sous-arbre droit:

$$T = \bullet$$

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles-1;
 $\rightsquigarrow \frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ arbres de taille n (n -ième nombre de Catalan).
- Décomposition unique : racine / sous-arbre gauche / sous-arbre droit:

$$T = \bullet \quad \text{ou} \quad T = T_0 \wedge T_1.$$

- **Arbre** = arbre binaire fini, enraciné, orienté :



- **Taille** d'un arbre = nombre de nœuds internes = nombre de feuilles - 1;

↪ $\frac{1}{2n} \binom{2n}{n}$ arbres de taille n (n -ième nombre de Catalan).

- Décomposition unique : racine / sous-arbre gauche / sous-arbre droit:

$$T = \bullet \quad \text{ou} \quad T = T_0 \wedge T_1.$$

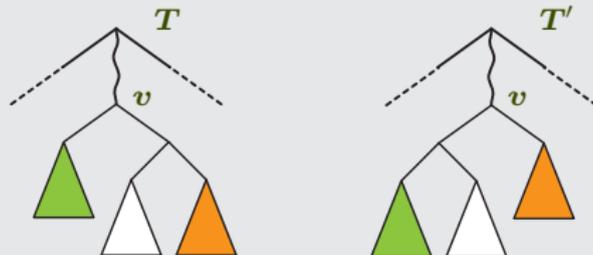
↪ correspondance bijective entre

- arbres de taille n , et
- parenthésages d'une expression à $n + 1$ variables.

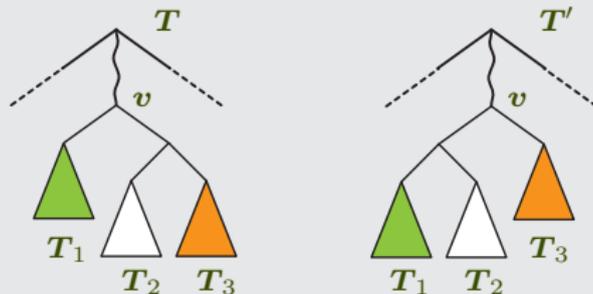
- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ;

- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation (positive)** à partir de T

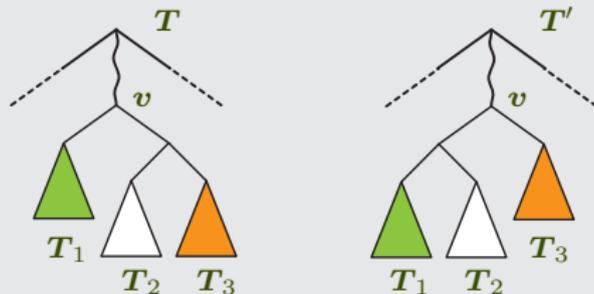
- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation** (positive) à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a



- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation** (positive) à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a



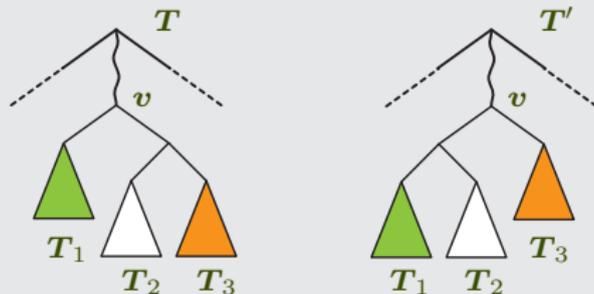
- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation (positive)** à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a



- En termes de parenthésages : rotation = application de l'associativité

$$T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) \leftrightarrow (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3.$$

- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation** (positive) à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a

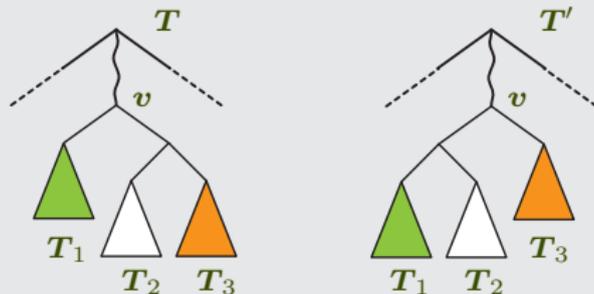


- En termes de parenthésages : rotation = application de l'associativité

$$T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) \leftrightarrow (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3.$$

- **Fait**: Deux arbres de même taille sont reliés par une suite finie de rotations.

- **Définition** : Soient T, T' deux arbres de même taille ; T' est obtenu par **rotation** (positive) à partir de T s'il existe un nœud v de T t.q. T et T' coïncident sauf au voisinage de v , où on a



- En termes de parenthésages : rotation = application de l'associativité

$$T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) \leftrightarrow (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3.$$

- **Fait**: Deux arbres de même taille sont reliés par une suite finie de rotations.

- **Définition**: $\text{dist}(T, T') := \#$ minimal de rotations pour aller de T à T' .

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre $\text{Cayley}(\mathfrak{S}_n)$,

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ;

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
↔ treillis de Tamari, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.

- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
↔ treillis de Tamari, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.

K_0 :

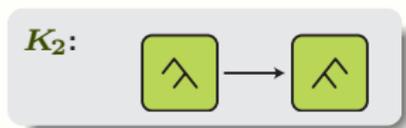
- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
↔ treillis de Tamari, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.

 K_0 :

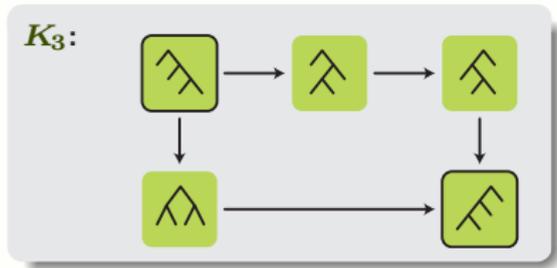
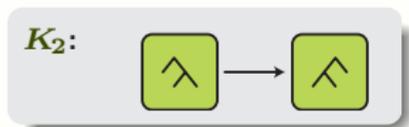
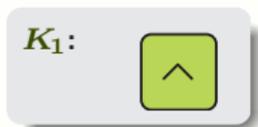
- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
↔ treillis de Tamari, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.

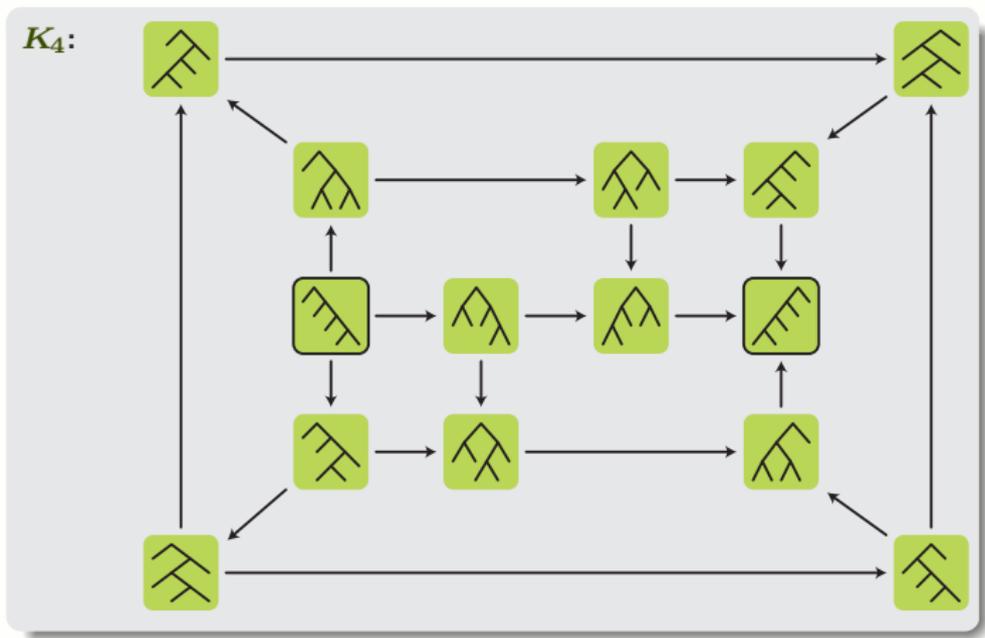
 K_0 : K_1 :

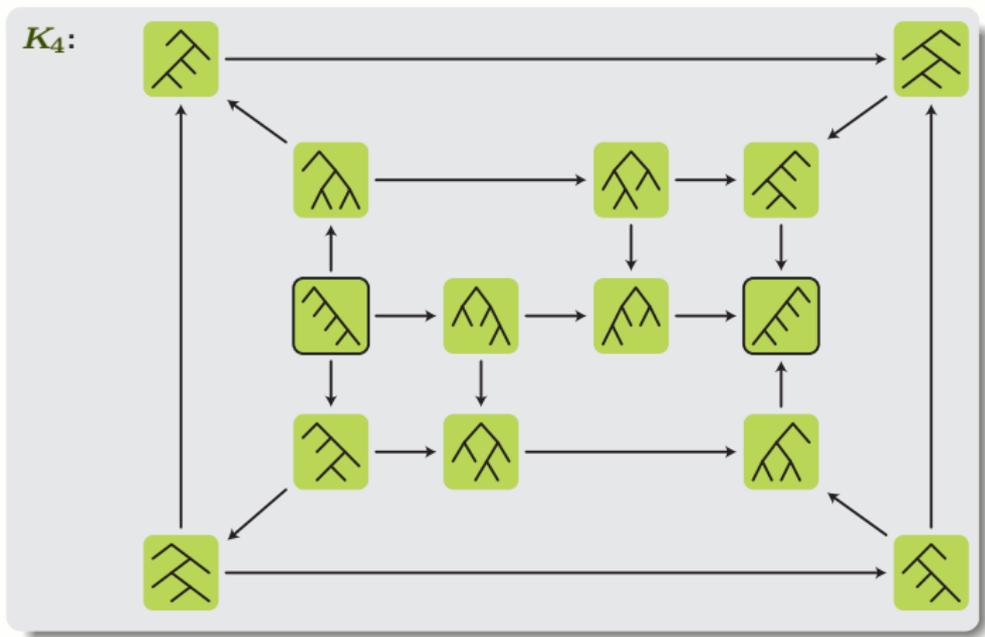
- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre Cayley (\mathfrak{S}_n) ,
donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
↔ treillis de Tamari, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.



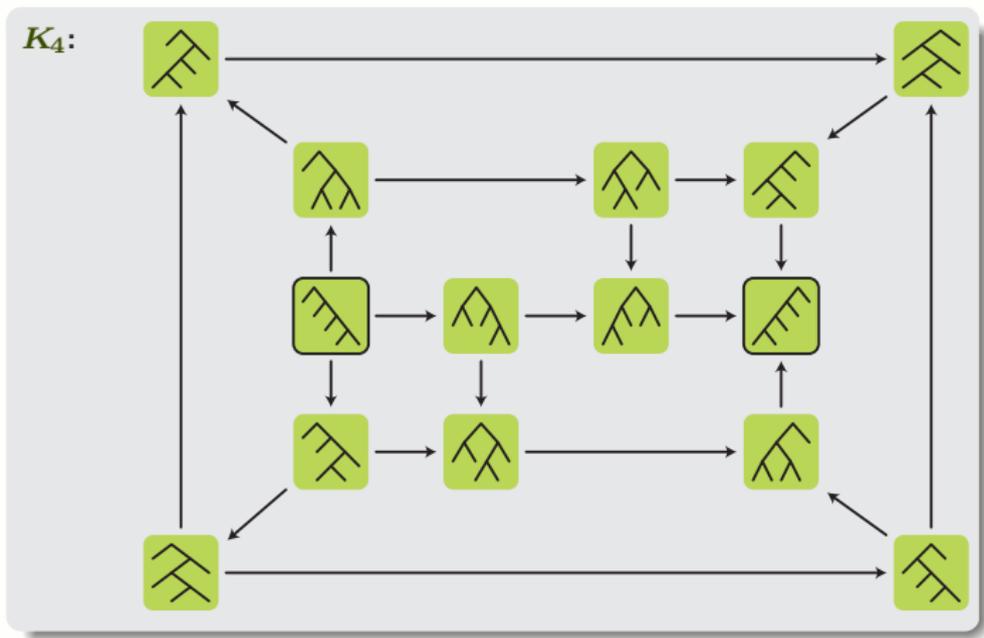
- Pour chaque n , un graphe, le n -ième associaèdre K_n :
 - sommets : les $\text{Cat}(n)$ arbres de taille n ,
 - arêtes : les paires (T, T') t.q. $\text{dist}(T, T') = 1$ (« paires de base »).
- K_n se plonge dans le permutoèdre $\text{Cayley}(\mathfrak{S}_n)$,
 donc est inscrit sur une sphère S^{n-2} ; il possède un circuit hamiltonien.
- K_n orienté par le sens des rotations ;
 \rightsquigarrow treillis de **Tamari**, min = peigne à droite, max = peigne à gauche.



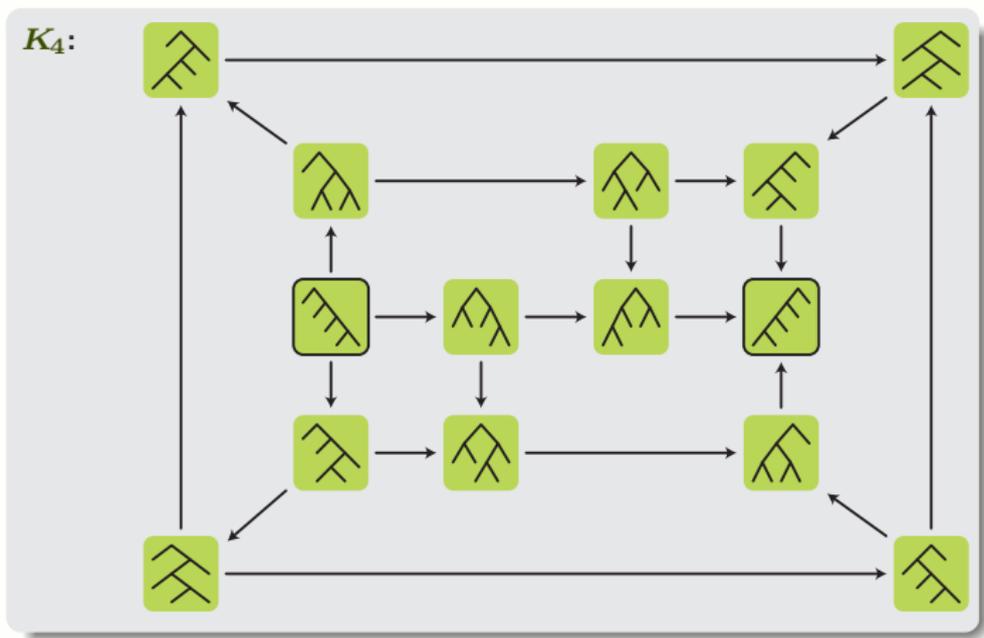




- Définition : $d(n)$



- **Définition :** $d(n) := \text{diamètre}(K_n) = \max\{\text{dist}(T, T') \mid |T| = |T'| = n\}$.



• **Définition :** $d(n) := \text{diamètre}(K_n) = \max\{\text{dist}(T, T') \mid |T| = |T'| = n\}$.

• **Exemple:** $d(4) = 4$.

- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :

- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



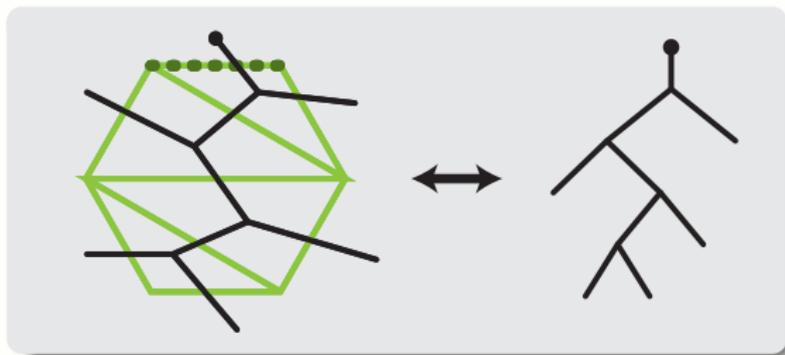
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



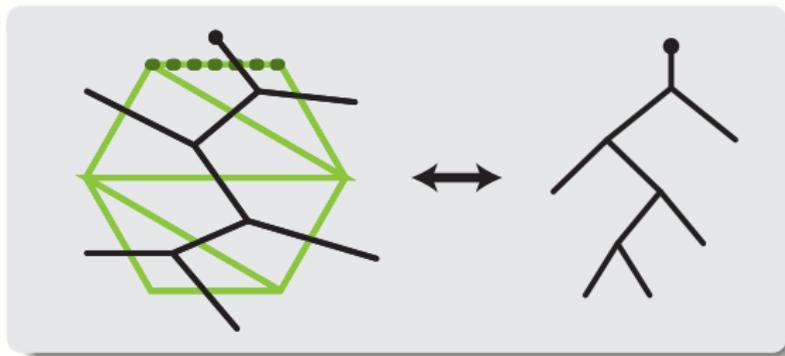
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :

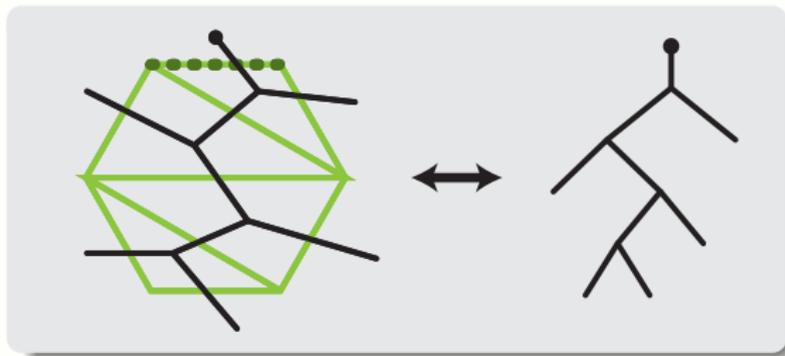


- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :

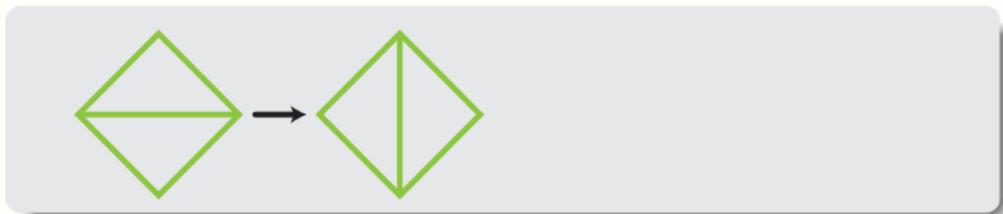


- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :

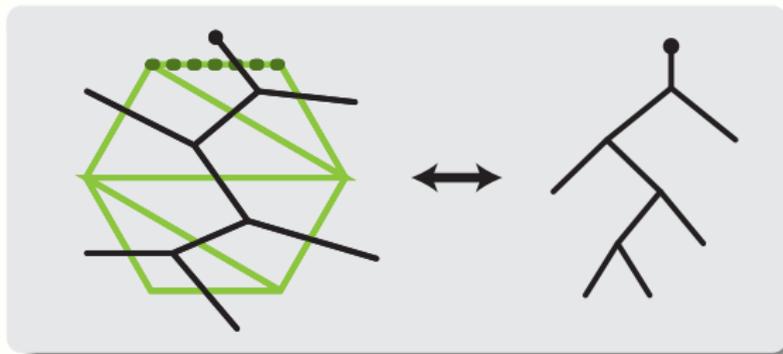
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :



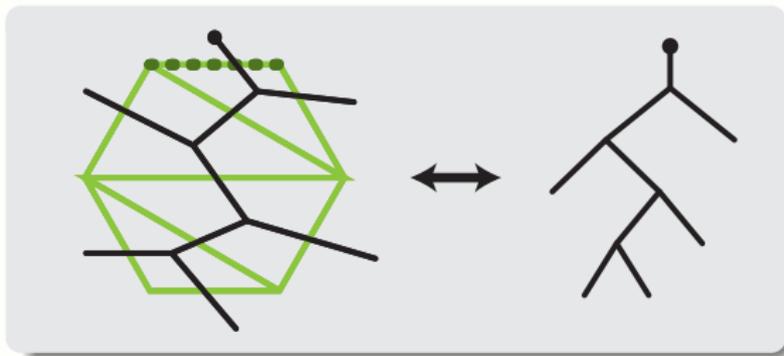
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



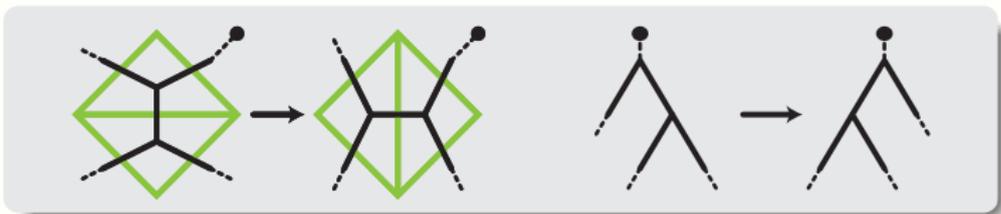
- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :



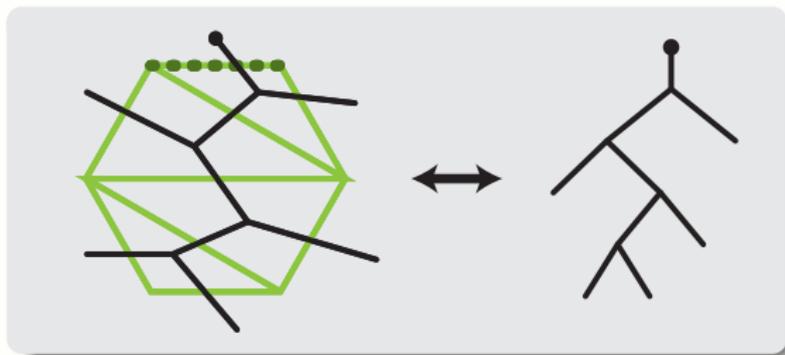
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



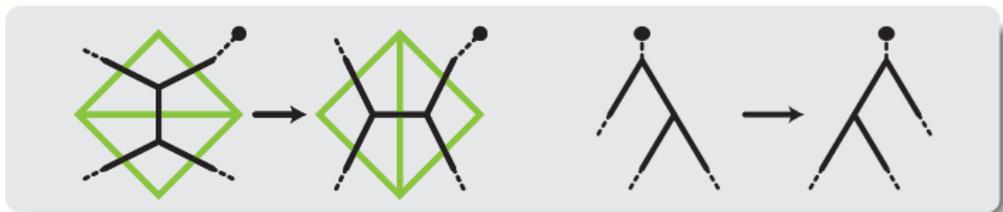
- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :



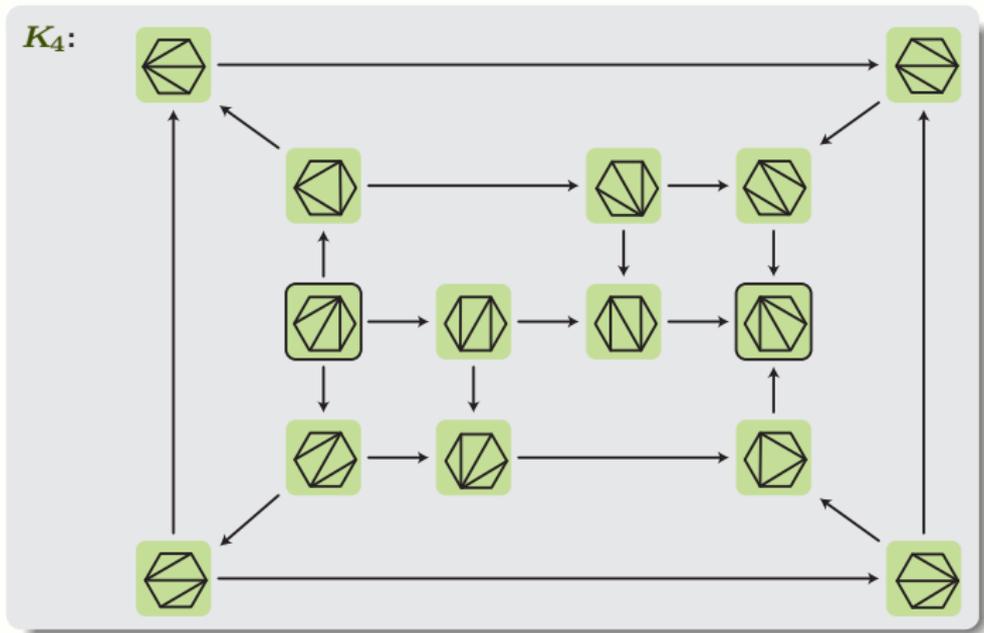
- Bijection entre arbres de taille n et triangulations d'un $(n+2)$ -gone :



- Alors une rotation correspond à un **flip** dans la triangulation associée :



↔ $d(n)$ = distance de flip maximale entre triangulations d'un $(n+2)$ -gone.



2. Les résultats de Sleator, Tarjan, et Thurston

- **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

- **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

- **Démonstration** : (point de vue triangulations)

- **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

- **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone, $T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T

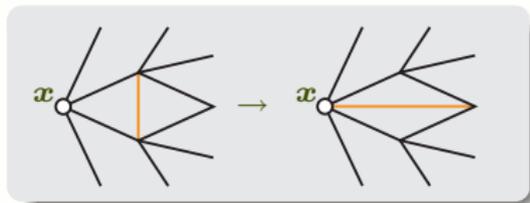
- **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

- **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T') \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T'))$.

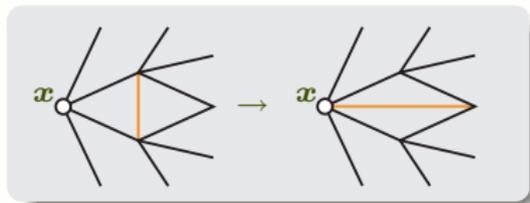
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$,

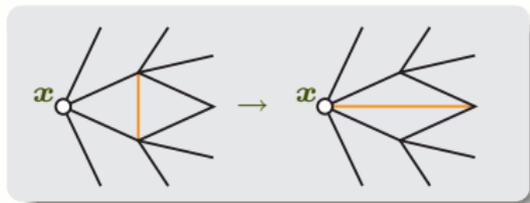
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

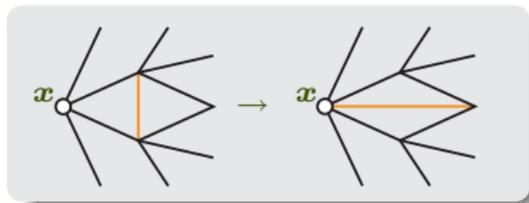
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

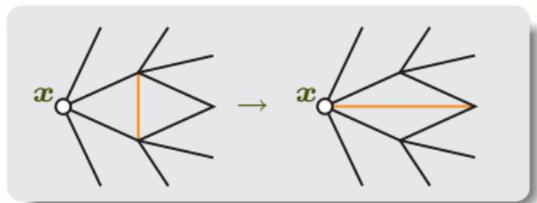
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3(n+2).$$

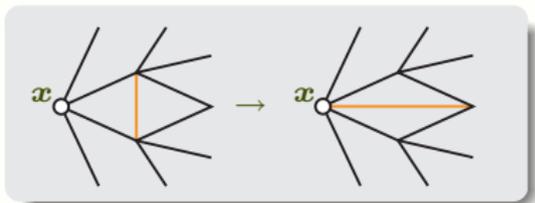
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3(n+2).$$

Pour $n > 10$, on a $3(n+2) < 4n - 4$, d'où

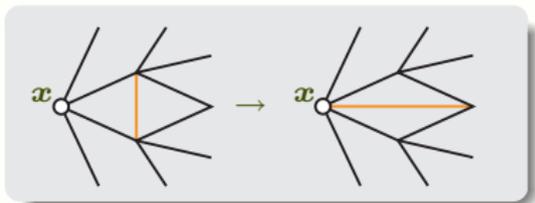
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3(n+2).$$

Pour $n > 10$, on a $3(n+2) < 4n - 4$, d'où

$$\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \geq 4.$$

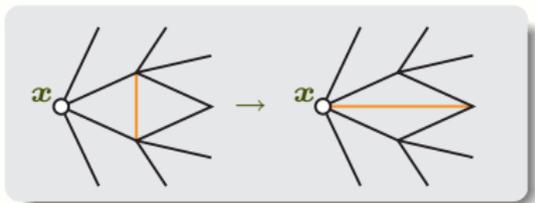
• **Proposition (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \leq 2n - 6$ pour $n > 10$.

• **Démonstration** : (point de vue triangulations) Pour x sommet du $(n+2)$ -gone,

$T_x :=$ triangulation avec $n-1$ diagonales partant de x .

Alors $\text{dist}(T, T_x) = n - 1 - \text{deg}(x, T)$ pour toute triangulation T ,

diagonales issues de x dans T



donc $\text{dist}(T, T_x) \leq 2n - 2 - \sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x))$.

Or $\sum_x \text{deg}(x, T) = 2n - 2$, donc

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) = 4n - 4.$$

Si $\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3$, alors

$$\sum_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \leq 3(n+2).$$

Pour $n > 10$, on a $3(n+2) < 4n - 4$, d'où

$$\sup_x (\text{deg}(x, T) + \text{deg}(x, T_x)) \geq 4.$$

□

- Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988) : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

- **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.
- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.)

- **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988) :** $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.
- **Démonstration :** (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 ,

- **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres,

- **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.
- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres, et Π un circuit hamiltonien à travers les sommets de P .

• **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

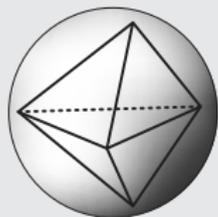
• **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres, et Π un circuit hamiltonien à travers les sommets de P . Alors Π partage S^2 en deux demi-sphères bordées par un $(n+2)$ -gone,

• **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres,
et Π un circuit hamiltonien à travers les sommets de P .
Alors Π partage S^2 en deux demi-sphères bordées par un $(n+2)$ -gone,
qui est triangulé de deux façons par la projection des arêtes des tétraèdres.

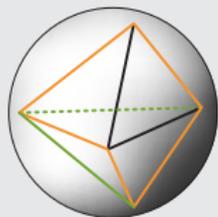
• **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres, et Π un circuit hamiltonien à travers les sommets de P . Alors Π partage S^2 en deux demi-sphères bordées par un $(n+2)$ -gone, qui est triangulé de deux façons par la projection des arêtes des tétraèdres.



• **Théorème (Sleator-Tarjan-Thurston, 1988)** : $d(n) \geq 2n - 6$ pour n grand.

- **Démonstration** : (Géométrie hyperbolique.) Soit P un polytope à $n+2$ sommets inscrit dans S^2 , avec une décomposition en tétraèdres, et Π un circuit hamiltonien à travers les sommets de P . Alors Π partage S^2 en deux demi-sphères bordées par un $(n+2)$ -gone, qui est triangulé de deux façons par la projection des arêtes des tétraèdres.



- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P$

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdres})}$.

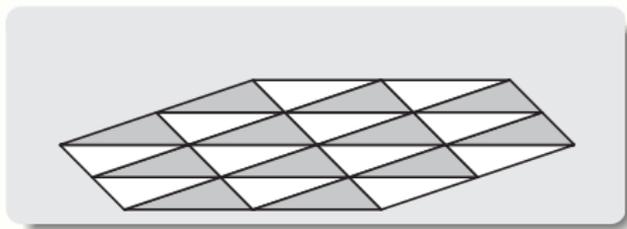
- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdres})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdres})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.

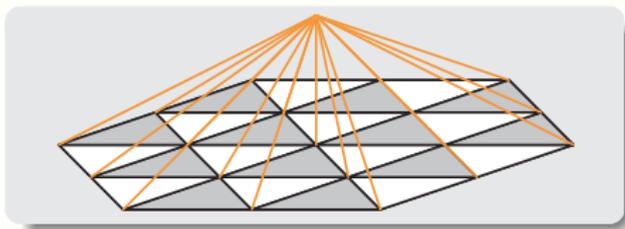
- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdres})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre}) : \text{ au mieux } \text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
↪ Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan
 (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :

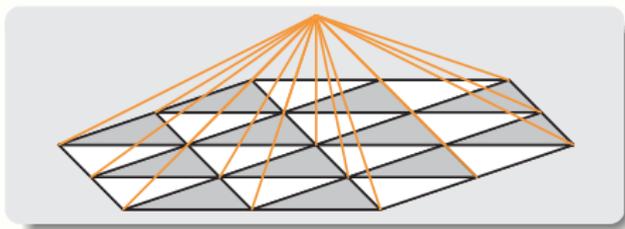


- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :



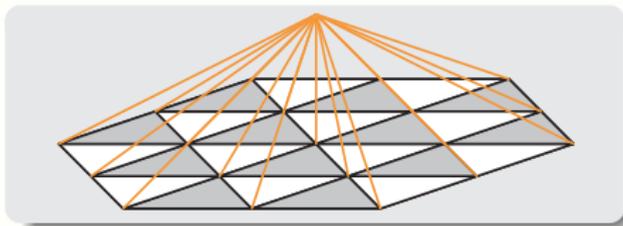
- Donne $2n - O(\sqrt{n})$, puis $2n - 6$ pour n assez grand (non effectif).

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :



- Donne $2n - O(\sqrt{n})$, puis $2n - 6$ pour n assez grand (non effectif). □

- Alors $\text{dist}(T, T') = \# \text{ tétraèdres dans } P \geq \frac{\text{vol}(P)}{\max \text{vol}(\text{tétraèdre})}$.
- Dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 :
 $\text{vol}(P) \leq \frac{4}{3}\pi R^3 \leq 3 \max \text{vol}(\text{tétraèdre})$: au mieux $\text{dist}(T, T') \geq 3!$
- Dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :
 $\text{vol}(P)$ peut être grand même avec $\max \text{vol}(\text{tétraèdre}) \leq 1$.
 \rightsquigarrow Trouver un polytope avec $n+2$ sommets et volume hyperbolique $2n-6$.
- Solution de Sleator, Tarjan, Thurston : utiliser des pavages du plan (soigneusement choisis) et les fermer avec un unique point hors du plan :



- Donne $2n - O(\sqrt{n})$, puis $2n - 6$ pour n assez grand (non effectif). □

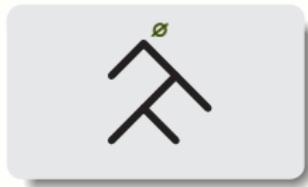
- **Questions:** Quid des petites valeurs de n ?
 Quid d'une démonstration combinatoire?

3. Utiliser les positions :
lien avec le groupe de Thompson F

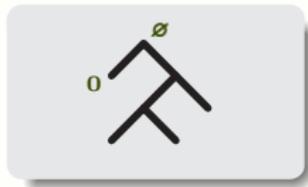
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations,

- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations,
et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.

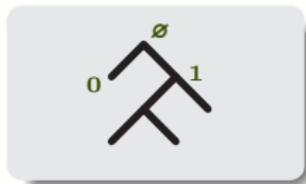
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



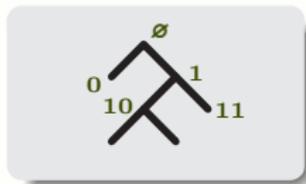
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



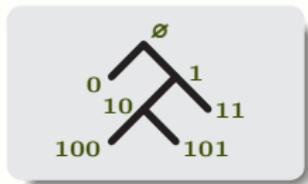
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



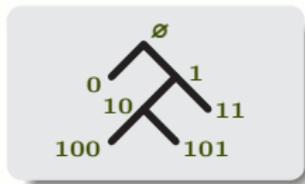
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations,
et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



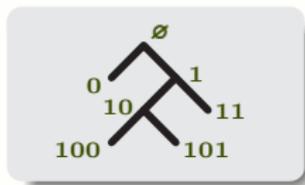
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



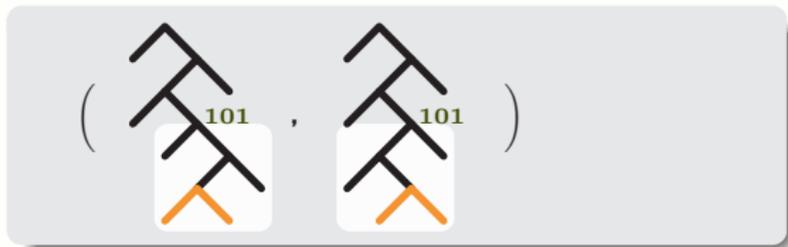
et spécifier une rotation par l'adresse de la racine du sous-arbre mis en jeu :



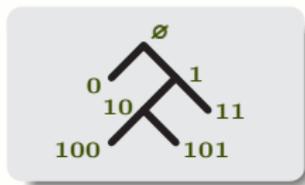
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



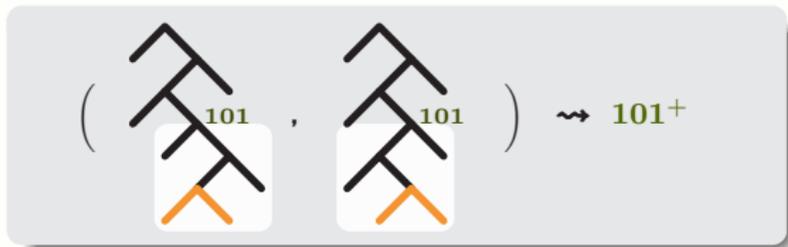
et spécifier une rotation par l'adresse de la racine du sous-arbre mis en jeu :



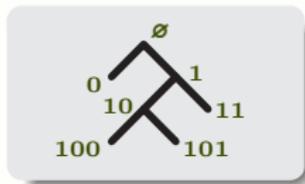
- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



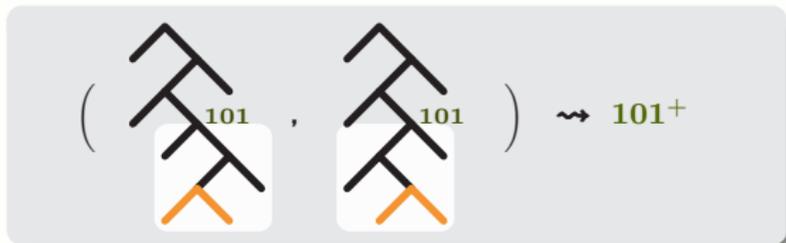
et spécifier une rotation par l'adresse de la racine du sous-arbre mis en jeu :



- Principe : Prendre en compte les **positions** des rotations, et le spécifier à l'aide d'adresses binaires.
- Fixer des adresses pour les nœuds des arbres :



et spécifier une rotation par l'adresse de la racine du sous-arbre mis en jeu :



« appliquer l'associativité à la position **101** dans le sens positif ».

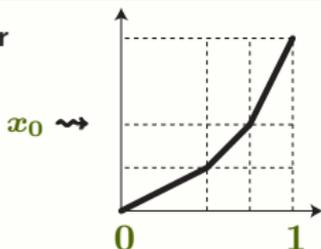
- Pour exploiter l'idée : utiliser le groupe de Thompson F .

- Définition (Richard Thompson, 1964) :

- **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

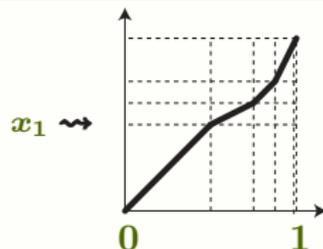
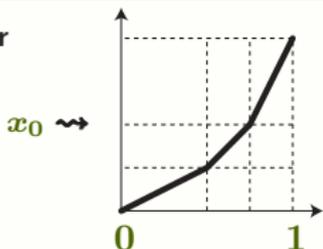
- **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

- engendré par



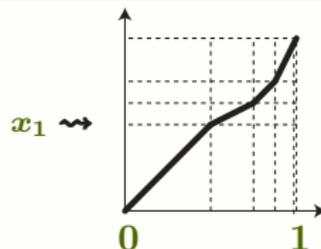
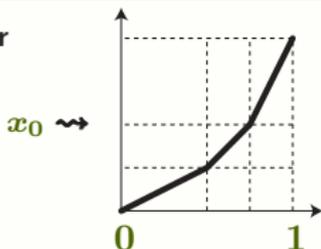
- **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux, croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

- engendré par



- **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

- engendré par

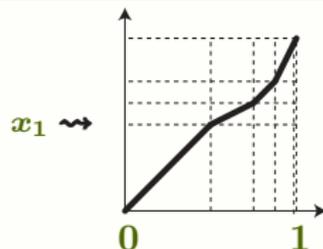
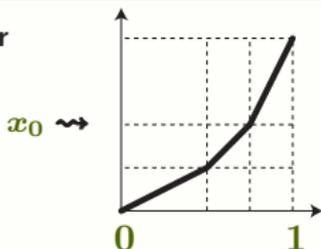


aussi représentés comme



- **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

- engendré par



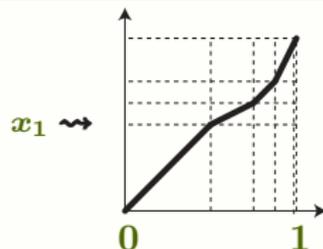
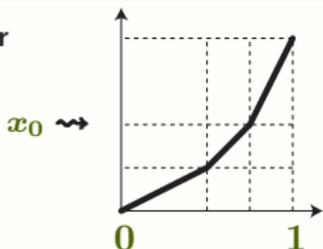
aussi représentés comme



\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:

• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

• engendré par



aussi représentés comme

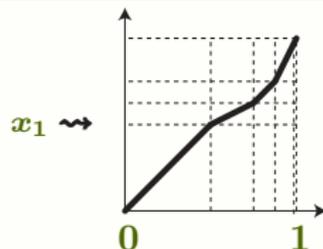
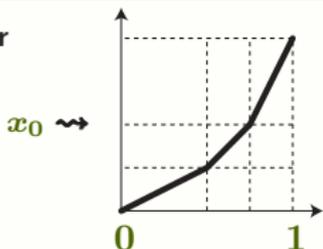


\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

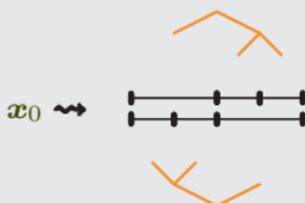
• engendré par



aussi représentés comme

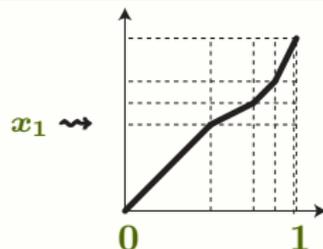
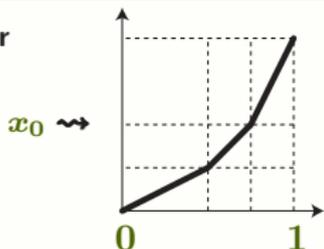


\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

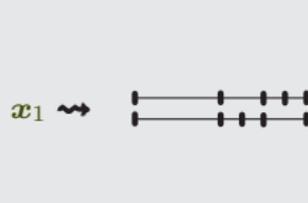
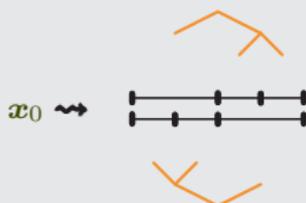
• engendré par



aussi représentés comme

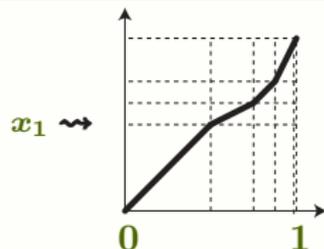
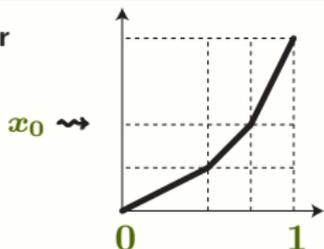


\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

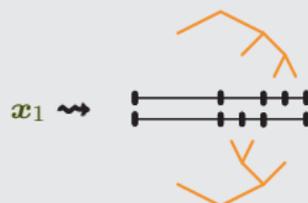
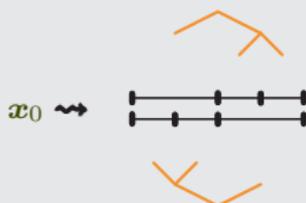
• engendré par



aussi représentés comme

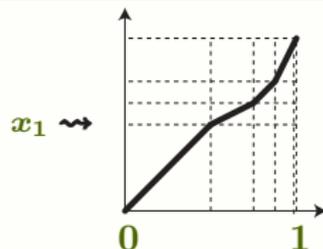
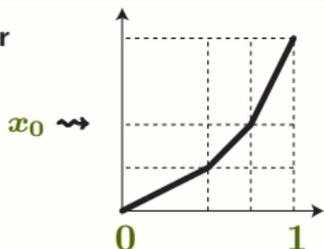


\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



• **Définition (Richard Thompson, 1964) :**
 F = groupe des homéomorphismes de $[0, 1]$ affines par morceaux,
 croissants, avec pentes et points de singularité de la dérivée dyadiques.

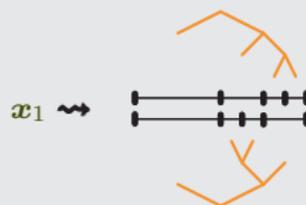
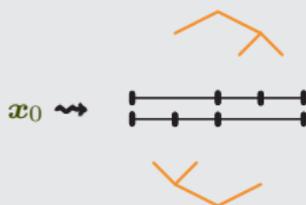
• engendré par



aussi représentés comme



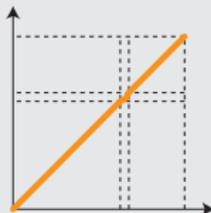
\rightsquigarrow un élément de F = un couple de décompositions dyadiques de $[0, 1]$:



donc aussi un couple d'arbres.

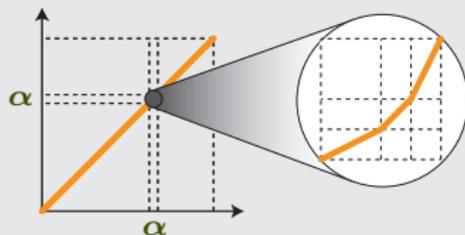
- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



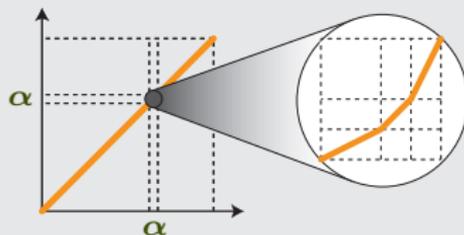
- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



- **Définition** : Pour α adresse binaire:

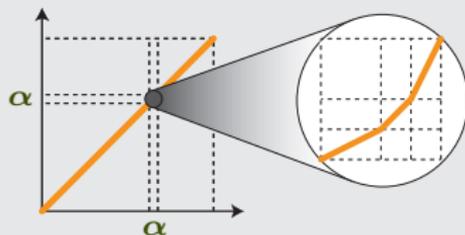
$$A_\alpha :=$$



- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

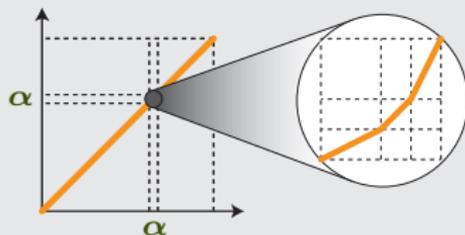
$$A_\alpha :=$$



- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$

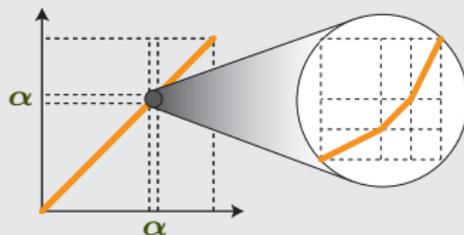


- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T')$

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$

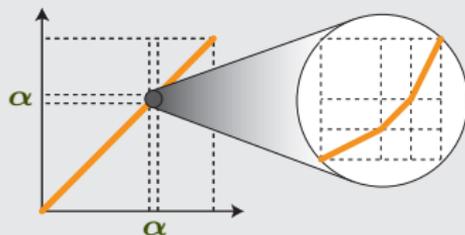


- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$

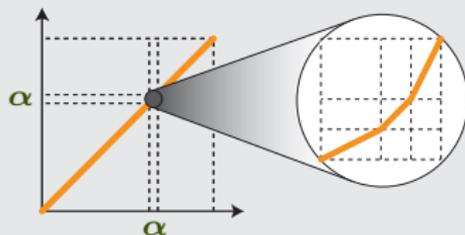


- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,
où g est l'élément de F associé à la paire (T, T') .

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



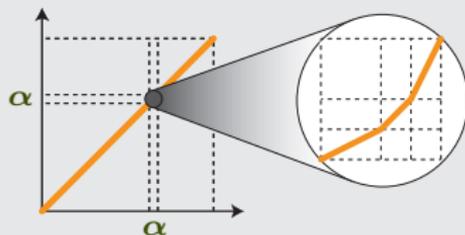
- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,
où g est l'élément de F associé à la paire (T, T') .

- **Démonstration**: (T, T') est une paire de base d'adresse α^+
ssi (T, T') est associé à A_α . \square

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

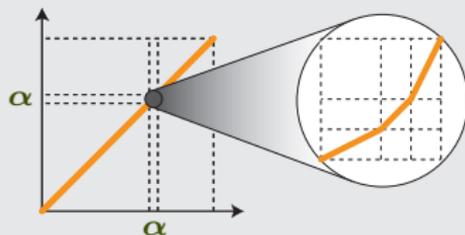
- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,
où g est l'élément de F associé à la paire (T, T') .

- **Démonstration**: (T, T') est une paire de base d'adresse α^+
ssi (T, T') est associé à A_α . \square

\rightsquigarrow Etudier la métrique de F par rapport à la famille de générateurs \mathcal{A} .

- **Définition** : Pour α adresse binaire:

$$A_\alpha :=$$



- Alors F est engendré par la famille \mathcal{A} des A_α (et même par A_\emptyset et A_1).

- **Lemme** : Pour tous arbres T, T' , on a $\text{dist}(T, T') = |g|_{\mathcal{A}}$,
où g est l'élément de F associé à la paire (T, T') .

- **Démonstration**: (T, T') est une paire de base d'adresse α^+
ssi (T, T') est associé à A_α . \square

\rightsquigarrow Etudier la métrique de F par rapport à la famille de générateurs \mathcal{A} .

- **Remarque** : Il existe une description complète de la métrique de F par rapport à $\{A_\emptyset, A_1\}$ (**Fordham**), et par rapport à $\{A_\emptyset, A_1, A_{11}, \dots\}$.

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_{\alpha}^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_{\alpha} \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_\alpha^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_\alpha \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

$$A_{\alpha 0\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 00\beta},$$

$$A_{\alpha 10\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 01\beta},$$

$$A_{\alpha 11\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 1\beta},$$

$$A_\beta \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont incomparables pour l'ordre préfixe.}$$

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_\alpha^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_\alpha \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

$$A_{\alpha 0\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 00\beta},$$

$$A_{\alpha 10\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 01\beta},$$

$$A_{\alpha 11\beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 1\beta},$$

$$A_\beta \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont incomparables pour l'ordre préfixe.}$$

↪ Tout invariant des relations ci-dessus donne une borne inférieure sur $|\cdot|_{\mathcal{A}}$.

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_\alpha^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_\alpha \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

$$A_{\alpha 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 0 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 1 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 1 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 1 \beta},$$

$$A_\beta \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont incomparables pour l'ordre préfixe.}$$

↔ Tout invariant des relations ci-dessus donne une borne inférieure sur $|\cdot|_A$.

- **Proposition** : Pour tous arbres T, T' ,

$$\text{dist}(T, T') \geq |\sum \text{exposants des } A_{1^p} \text{ dans une expression de } \Phi(T, T')|.$$

élément de F associé à (T, T')

- **Lemme** : Le groupe F est présenté par les relations :

$$A_\alpha^2 = A_{\alpha 1} \cdot A_\alpha \cdot A_{\alpha 0} \quad (\text{pentagone de MacLane–Stasheff}),$$

$$A_{\alpha 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 0 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 0 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 0 1 \beta},$$

$$A_{\alpha 1 1 \beta} \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_{\alpha 1 \beta},$$

$$A_\beta \cdot A_\alpha = A_\alpha \cdot A_\beta \quad \text{si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont incomparables pour l'ordre préfixe.}$$

↔ Tout invariant des relations ci-dessus donne une borne inférieure sur $|\cdot|_A$.

- **Proposition** : Pour tous arbres T, T' ,

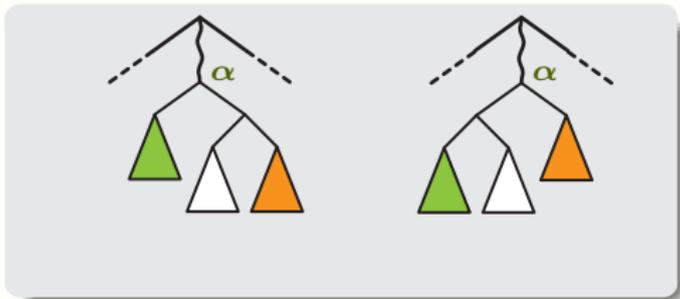
$$\text{dist}(T, T') \geq |\sum \text{exposants des } A_{1^p} \text{ dans une expression de } \Phi(T, T')|.$$

élément de F associé à (T, T')

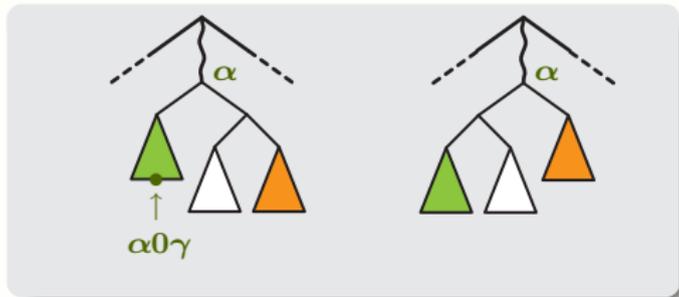
- **Corollaire** : $d(n) \geq n - 1$.

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :

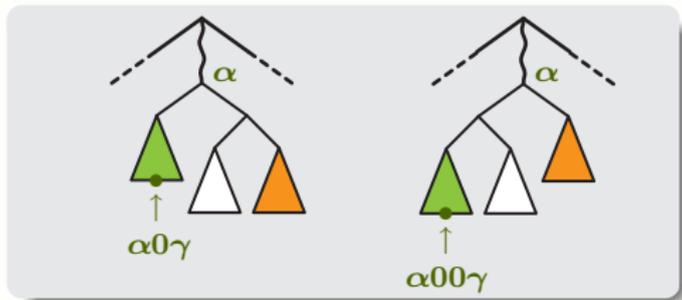
- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



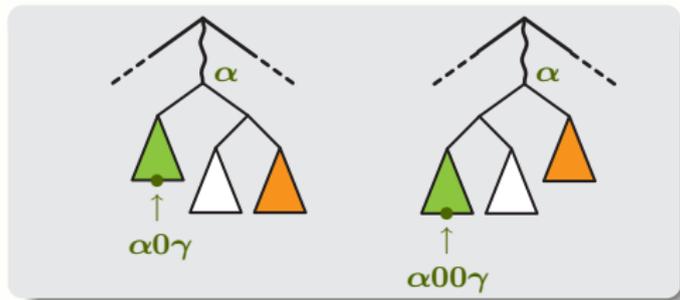
- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :

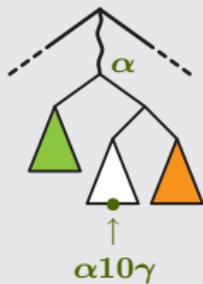


- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



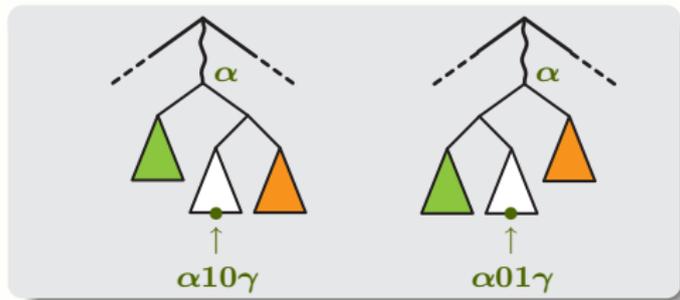
$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 00 \gamma$$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



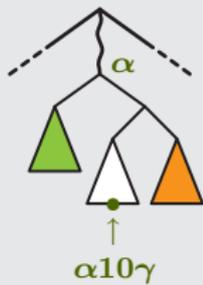
$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 00 \gamma$$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

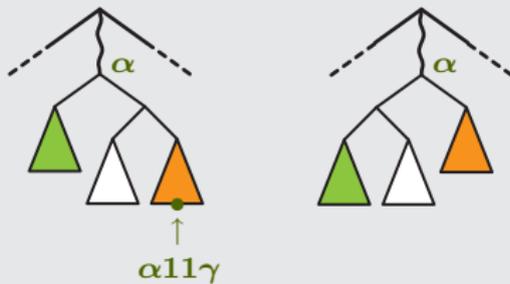
- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 00 \gamma$$

$$\alpha 10 \gamma \leftrightarrow \alpha 01 \gamma$$

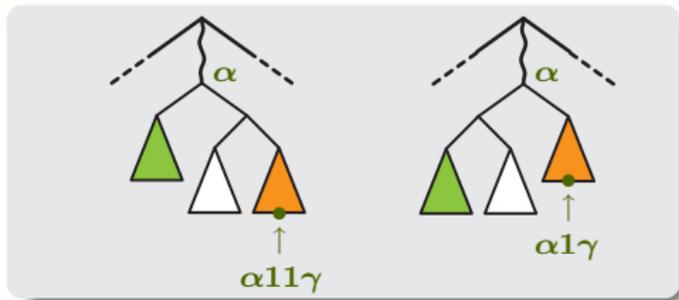
- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

$$\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$$

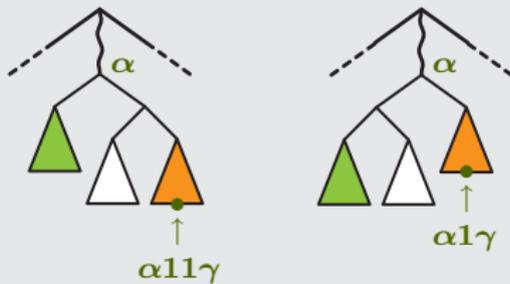
- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0\gamma \leftrightarrow \alpha 00\gamma$$

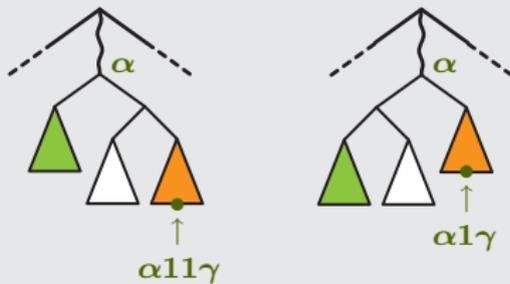
$$\alpha 10\gamma \leftrightarrow \alpha 01\gamma$$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



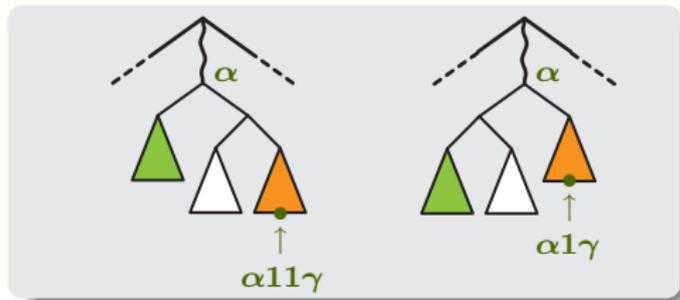
$\alpha 0\gamma \leftrightarrow \alpha 00\gamma$
 $\alpha 10\gamma \leftrightarrow \alpha 01\gamma$
 $\alpha 11\gamma \leftrightarrow \alpha 1\gamma$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :


 $\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$
 $\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$
 $\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$
 $\beta \leftrightarrow \beta$ pour α

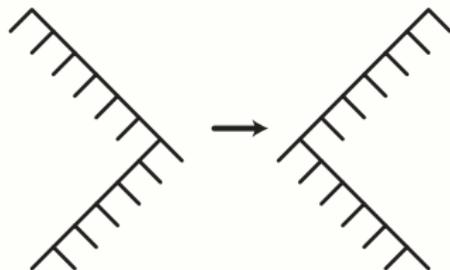
 non préfixe de β

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :

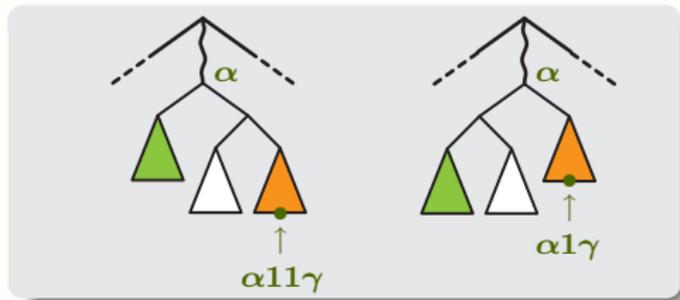

 $\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$
 $\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$
 $\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$
 $\beta \leftrightarrow \beta$ pour α

 non préfixe de β

- Application:



- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

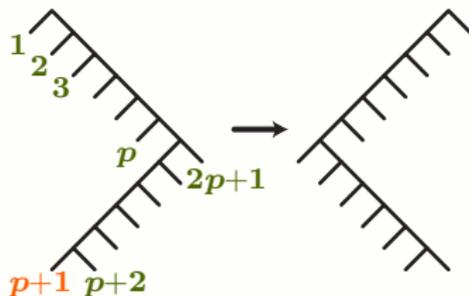
$$\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$$

$$\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$$

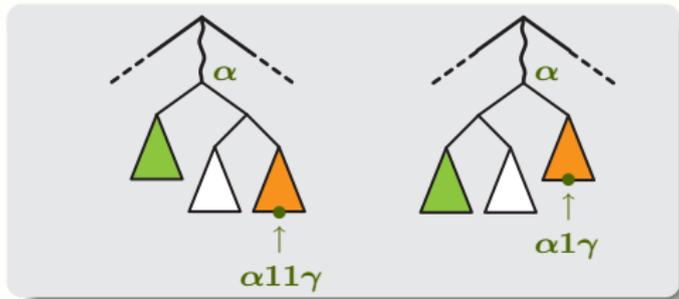
$$\beta \leftrightarrow \beta \text{ pour } \alpha$$

non préfixe de β

- Application:

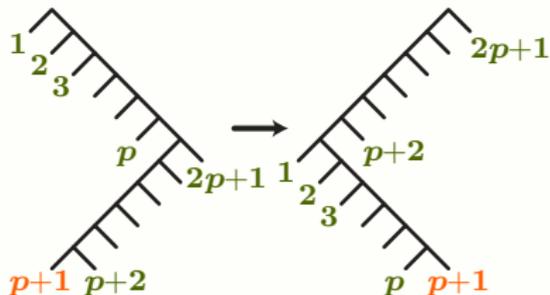


- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :

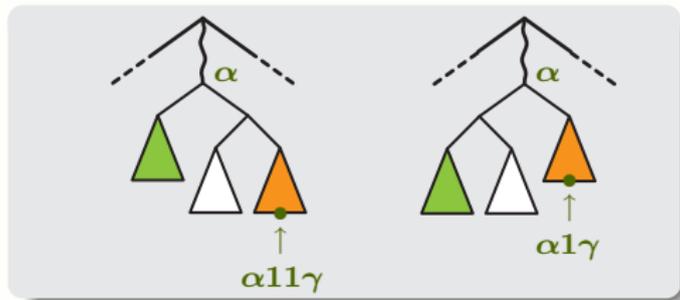

 $\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$
 $\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$
 $\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$
 $\beta \leftrightarrow \beta$ pour α

 non préfixe de β

- Application:

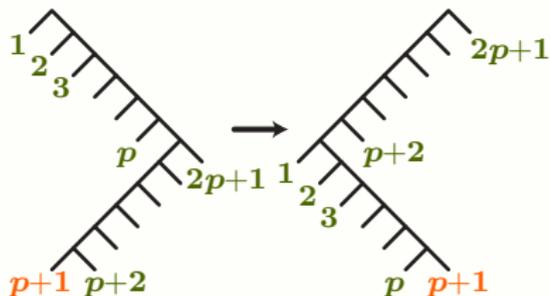


- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :

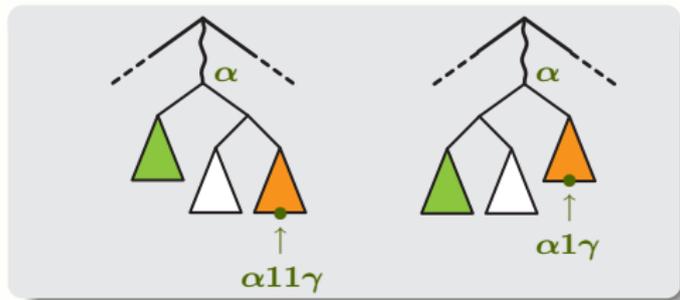

 $\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$
 $\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$
 $\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$
 $\beta \leftrightarrow \beta$ pour α

 non préfixe de β

- Application:

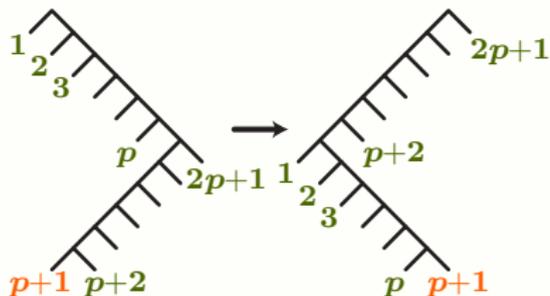

 adresse de la $(p+1)$ -ème feuille
 dans T : $1^p 0^p$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :


 $\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$
 $\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$
 $\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$
 $\beta \leftrightarrow \beta$ pour α

 non préfixe de β

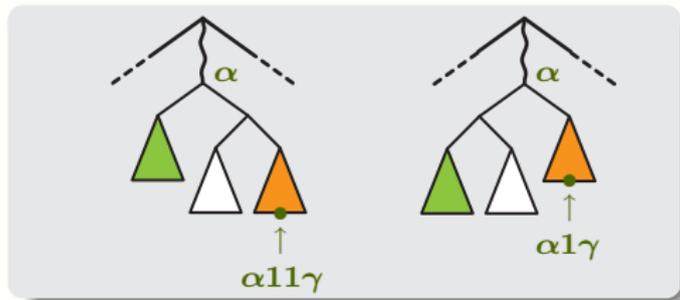
- Application:


 adresse de la $(p+1)$ -ème feuille

 dans T : $1^p 0^p$

 dans T' : $0^p 1^p$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

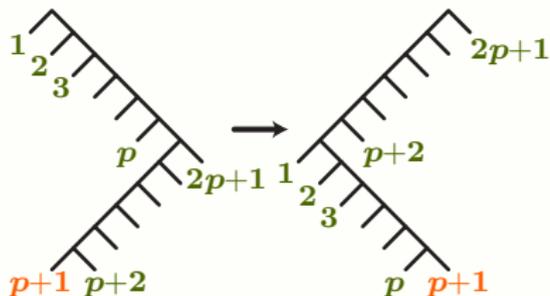
$$\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$$

$$\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$$

$$\beta \leftrightarrow \beta \text{ pour } \alpha$$

non préfixe de β

- Application:



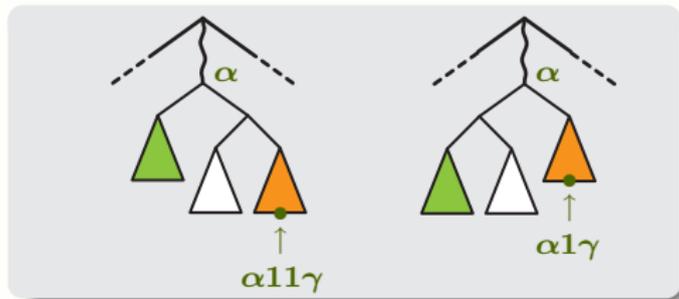
adresse de la $(p+1)$ -ème feuille

dans T : $1^p 0^p$

dans T' : $0^p 1^p$

$$\rightsquigarrow \text{dist}(T, T') \geq 3p - 2. \quad \square$$

- Autre idée basée sur les positions : suivre l'adresse de la i -ème feuille :



$$\alpha 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 0 \gamma$$

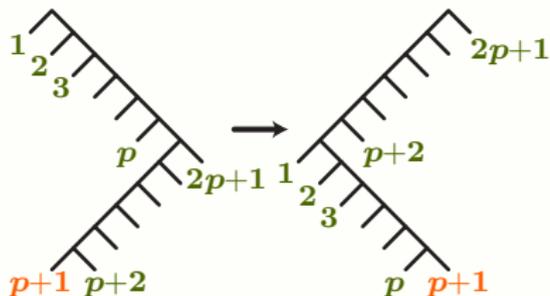
$$\alpha 1 0 \gamma \leftrightarrow \alpha 0 1 \gamma$$

$$\alpha 1 1 \gamma \leftrightarrow \alpha 1 \gamma$$

$$\beta \leftrightarrow \beta \text{ pour } \alpha$$

non préfixe de β

- Application:



adresse de la $(p+1)$ -ème feuille

dans T : $1^p 0^p$

dans T' : $0^p 1^p$

$$\rightsquigarrow \text{dist}(T, T') \geq 3p - 2. \quad \square$$

- Corollaire : $d(n) \geq \frac{3}{2}n - 2$.

4. Utiliser les noms :
la relation de recouvrement

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe)

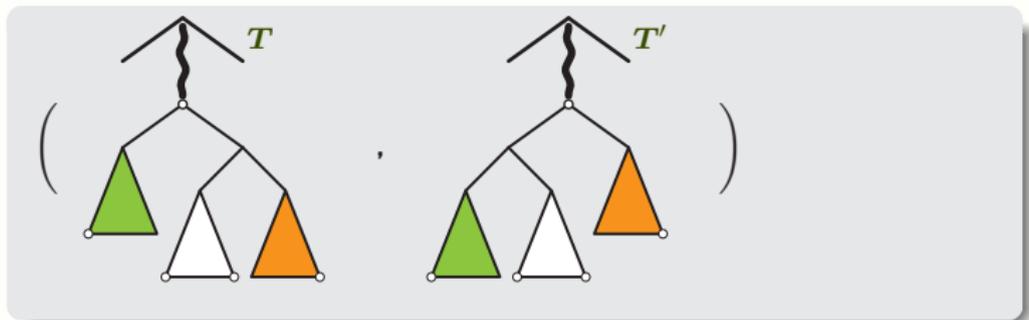
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (**associe**) / **nom** des éléments croisés

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).

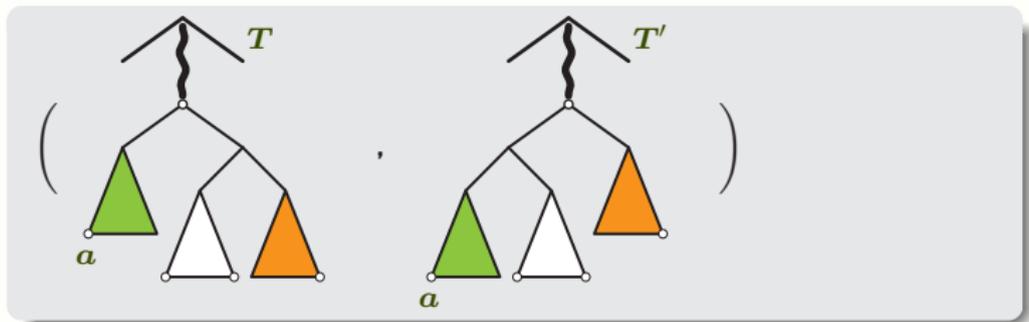
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres,

- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :

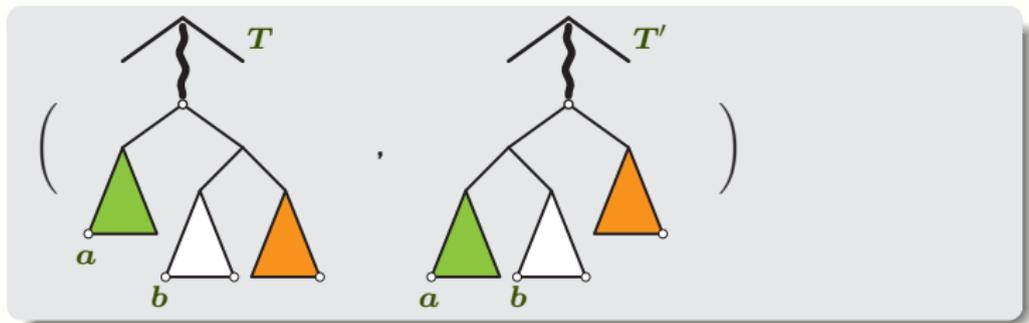
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :



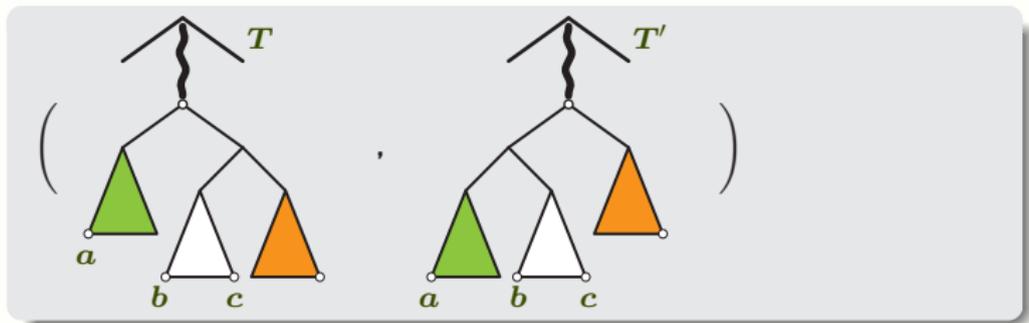
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :



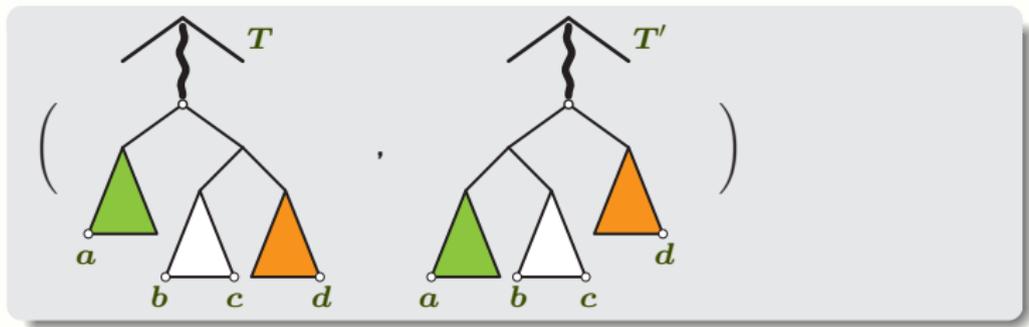
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :



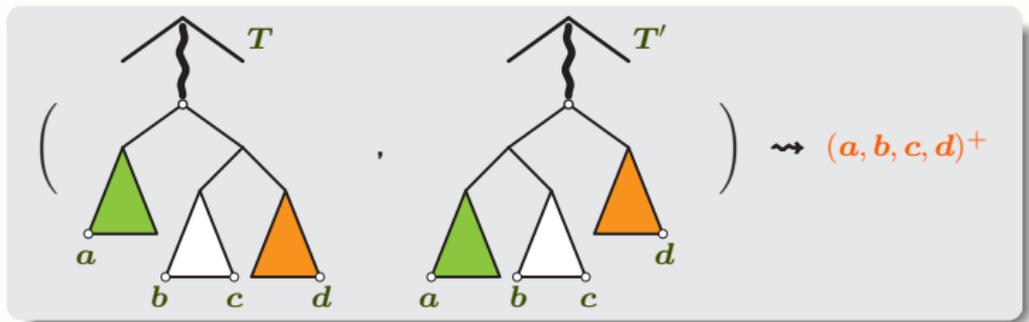
- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :

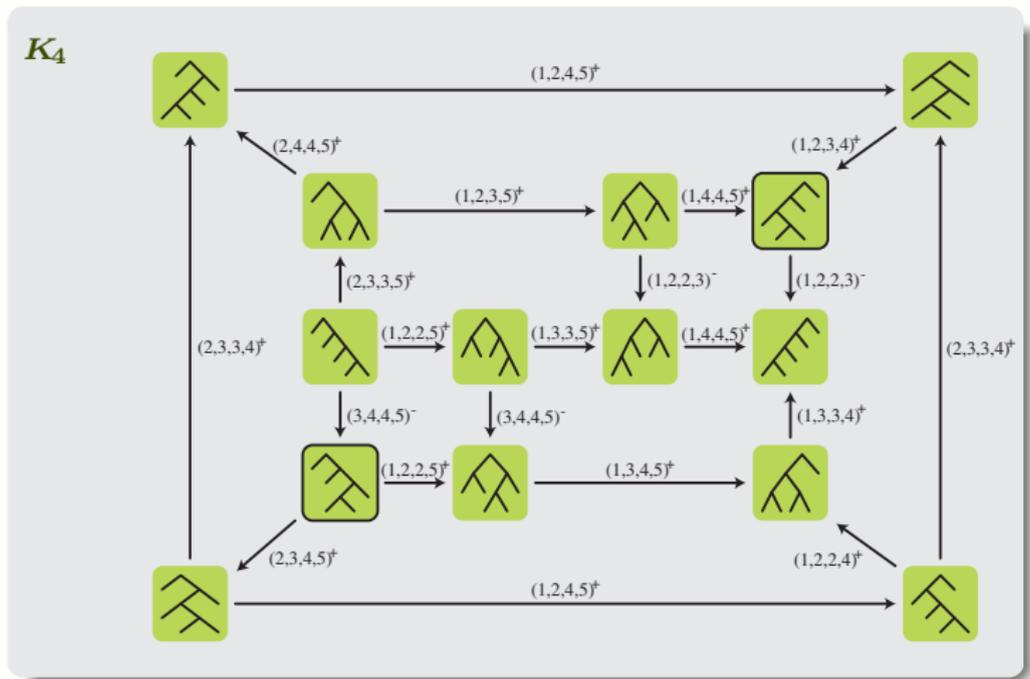


- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :



- Décomposition d'un chemin entre deux arbres en paires de base
= suite d'applications locales de l'**associativité**,
analogue à : Décomposition d'une permutation en transpositions
= suite d'applications locales de la **commutativité**.
- Deux approches :
position où on croise (associe) / **nom** des éléments croisés (associés).
- Attribuer des noms (étiquettes) aux feuilles des arbres, et spécifier
une rotation par les noms des extrémités des sous-arbres mis en jeu :





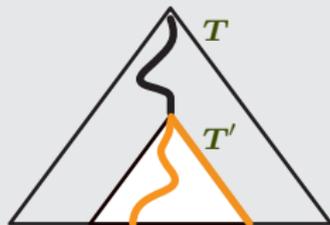
- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,

- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,

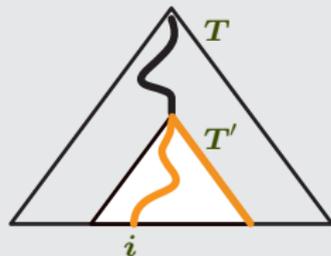
- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.

- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 - i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 - j est étiquette de la feuille finale de T' .

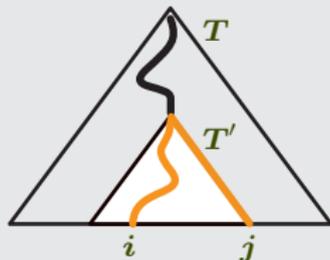
- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



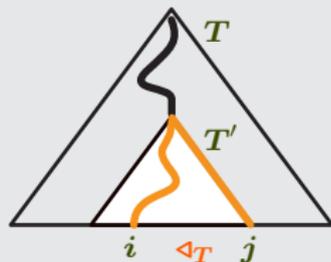
- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



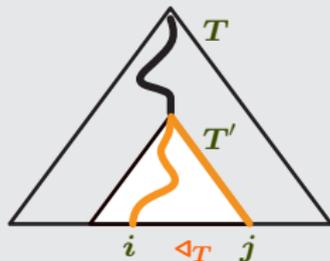
- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .

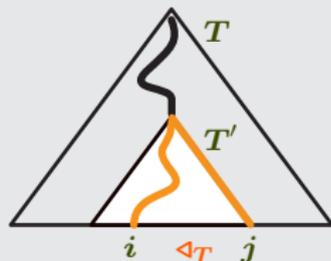


- **Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

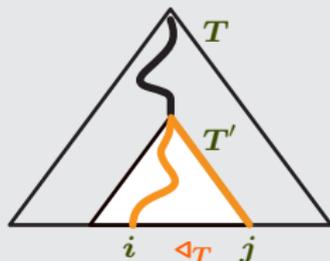
- Définition** : Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme** : Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$

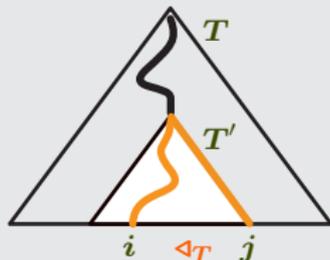
- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c$).

- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .

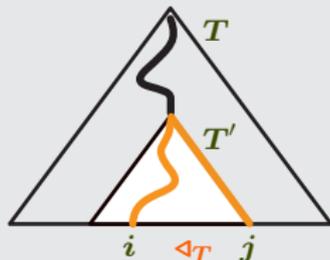


- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c)$.

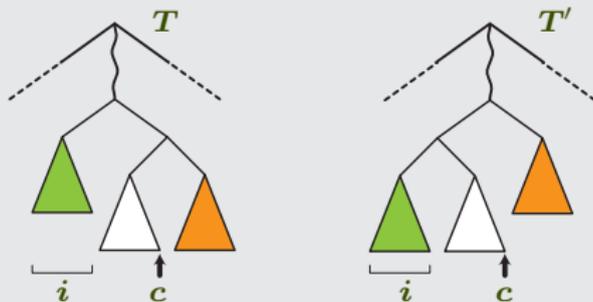


- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .

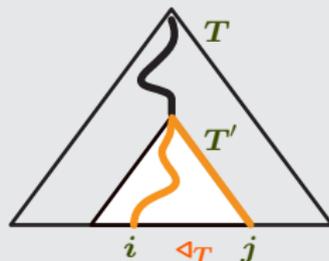


- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c$).

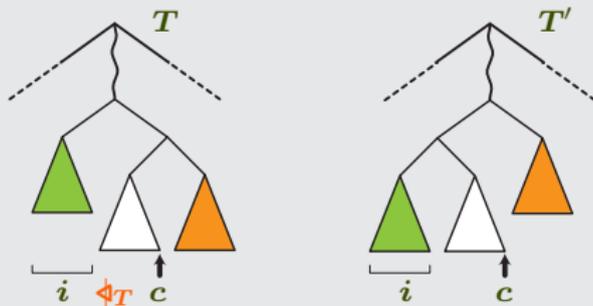


- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .

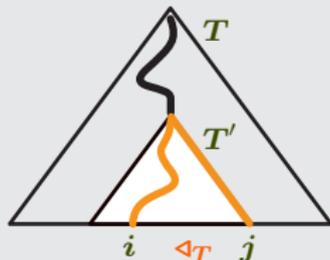


- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c$).

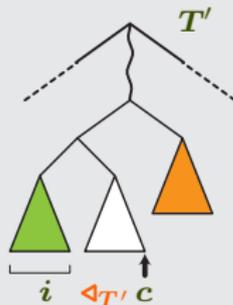
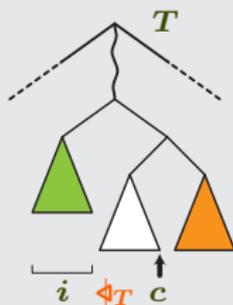


- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .

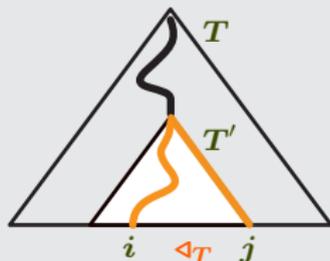


- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c)$.

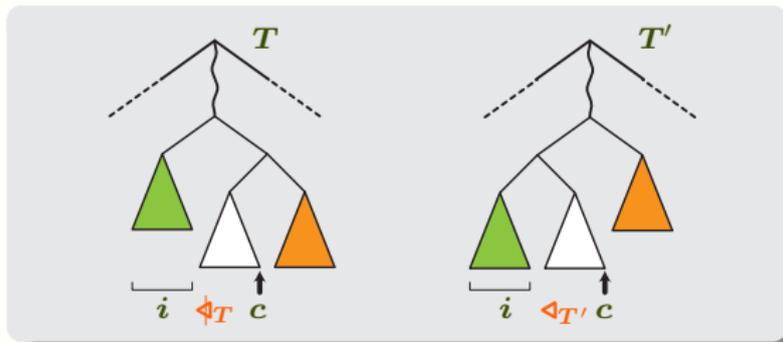


- Définition :** Pour i, j étiquettes de T ,
 i est **couvert** par j dans T , noté $i \triangleleft_T j$,
 s'il existe un sous-arbre T' de T t.q.
 i est étiquette d'une feuille non finale de T' ,
 j est étiquette de la feuille finale de T' .



- Une relation transitive qui détermine la forme de T .

- Lemme :** Si (T, T') est une paire de base de nom $(a, b, c, d)^+$, alors
 $i \triangleleft_{T'} j$ ssi $i \triangleleft_T j$ ou $(i \in [a, b[$ et $j = c$).



↪ Appliquer l'associativité (dans le sens positif) = **ajouter du recouvrement.**

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.
- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.
- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$),

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$,

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' .

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ ,

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher une paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n\dots$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins deux paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r .

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher une paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n\dots$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins deux paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(\alpha, j, j, \dots)^+$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

• **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n\dots$

• **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

• **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n\dots$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r .

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r . Donc, pour que i soit couvert par j dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

• **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

• **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

• **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r . Donc, pour que i soit couvert par j dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Cas 2 : $i \geq a$.

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher une paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins deux paires « associées à j ».

- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r . Donc, pour que i soit couvert par j dans T_ℓ , il faut après T_r une autre paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Cas 2 : $i \geq a$. Alors, par construction, i est couvert par $j-1$ dans T_r .

- Pour chaque paire $i < j$: une partition de l'associaèdre, $i \triangleleft j / i \not\triangleleft j$.

- **Principe** : On ne peut passer de la région $i \not\triangleleft j$ à la région $i \triangleleft j$ que par une paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

- Attacher **une** paire à une relation de couverture ne suffit pas pour dépasser $n...$

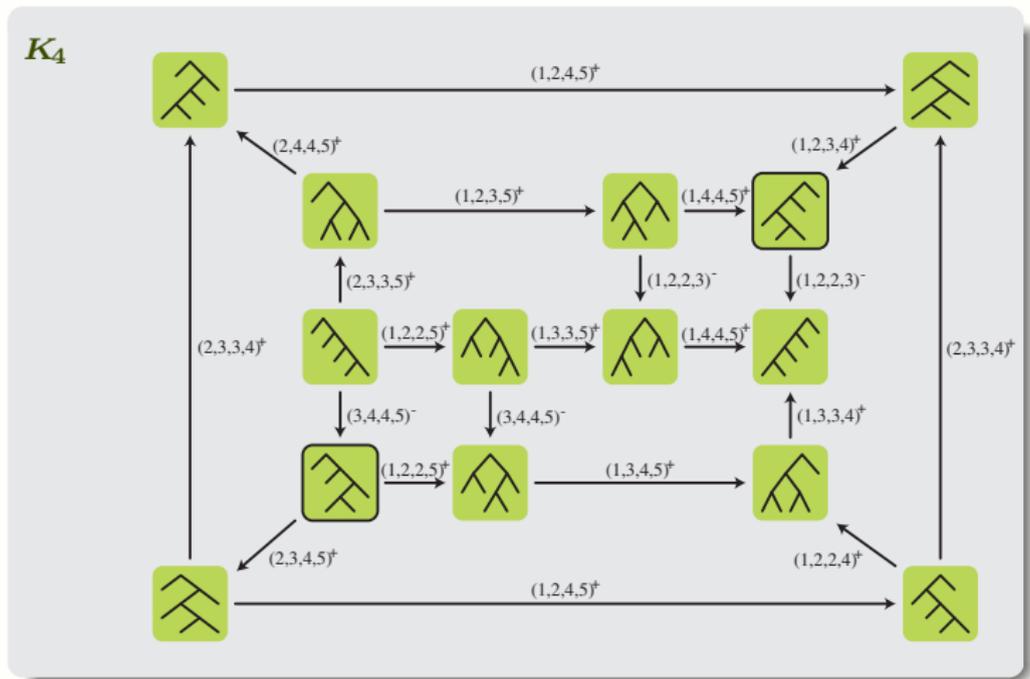
- **Principe Bis** : Supposons $j-1 \not\triangleleft_T j$ (donc $i \not\triangleleft_T j$), $i \triangleleft_{T'} j$, et en plus $i \not\triangleleft_{T'} j-1$. Alors tout chemin de T à T' contient au moins **deux** paires « associées à j ».

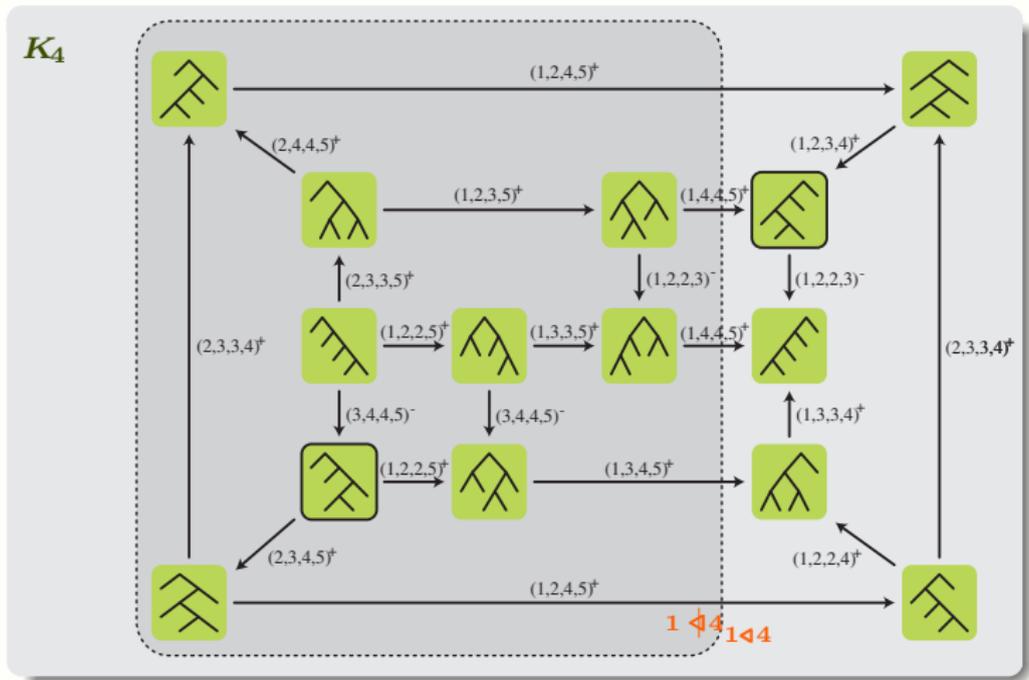
- **Démonstration** : Soit (T_0, \dots, T_ℓ) un chemin de T à T' . Puisque $j-1$ n'est pas couvert par j dans T_0 et l'est dans T_ℓ , il y a un premier r t.q. $j-1$ est couvert par j dans T_r . Le nom de (T_{r-1}, T_r) est $(a, j, j, \dots)^+$.

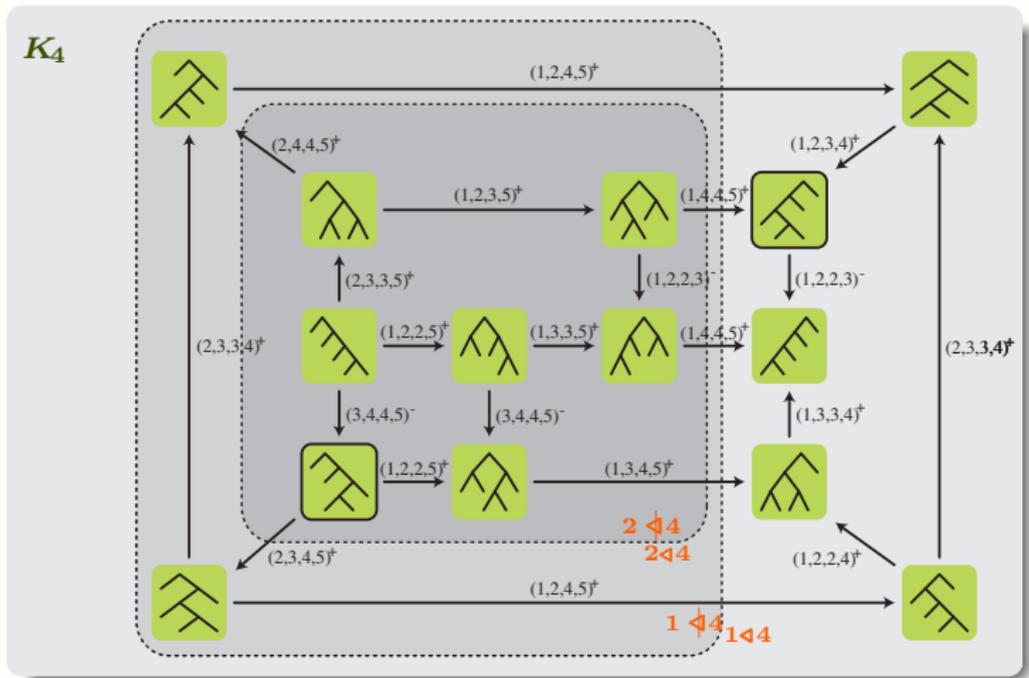
- Cas 1 : $i < a$. Alors i n'est pas couvert par j dans T_r . Donc, pour que i soit couvert par j dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j, \dots)^+$.

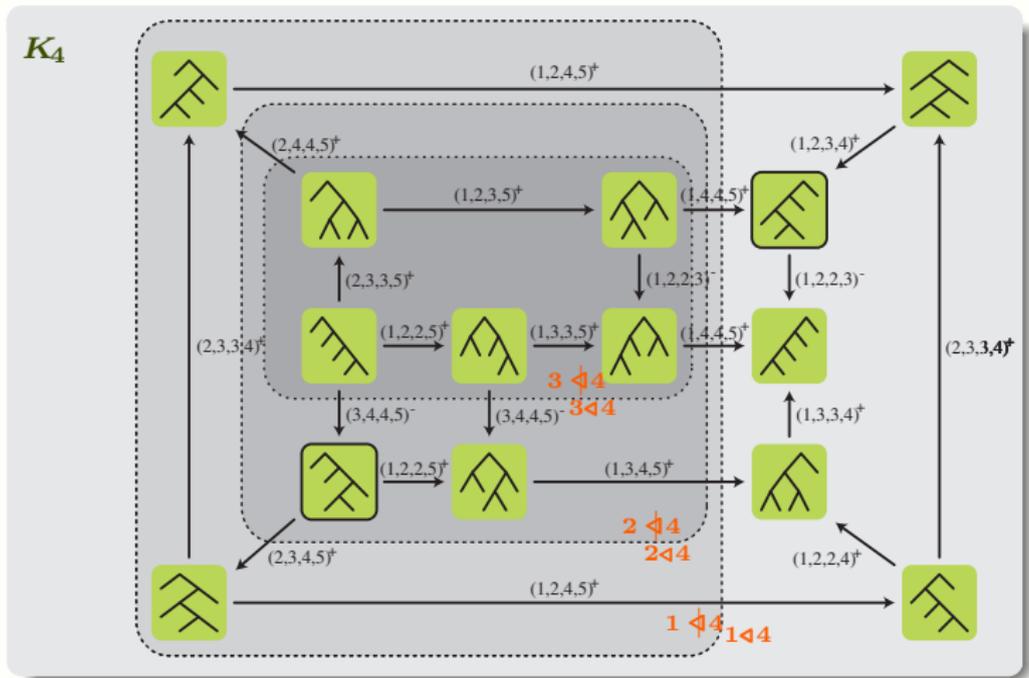
- Cas 2 : $i \geq a$. Alors, par construction, i est couvert par $j-1$ dans T_r . Donc, pour que i ne soit pas couvert par $j-1$ dans T_ℓ , il faut après T_r une **autre** paire de nom $(\leq i, > i, j-1, \dots)^-$.











- Application: De  à , la distance est 4,

- Application: De  à , la distance est 4, car tout chemin contient au moins une paire de chacune des quatre couleurs :

- Application: De  à , la distance est 4, car tout chemin contient au moins une paire de chacune des quatre couleurs :



**5. Utiliser les noms (suite) :
la relation d'effacement**

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

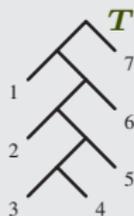
• **Définition** : $\text{coll}_I(\mathcal{T}) :=$

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(\mathcal{T}) :=$
effacement dans \mathcal{T}
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :

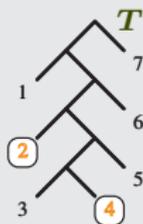
- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



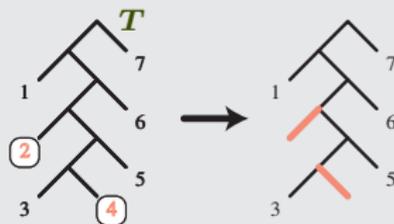
- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



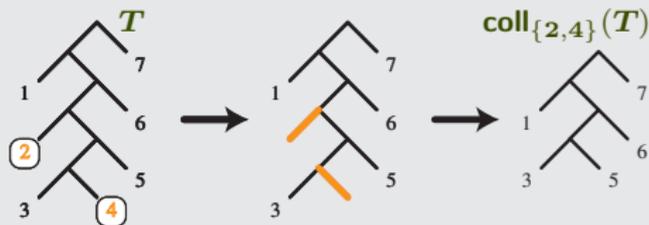
- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(\mathcal{T}) :=$
effacement dans \mathcal{T}
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



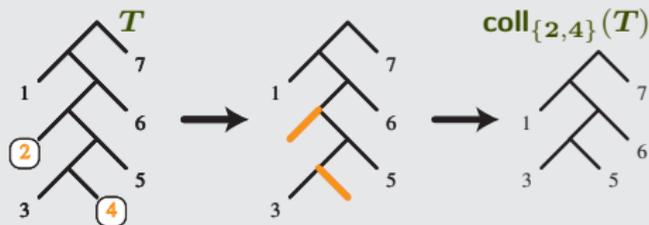
- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

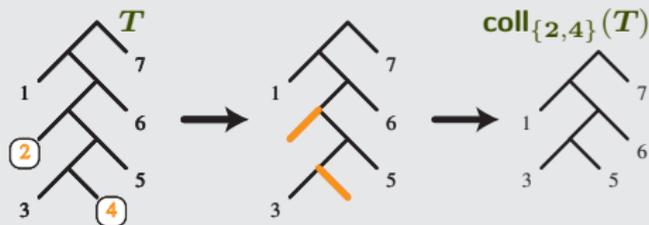
- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

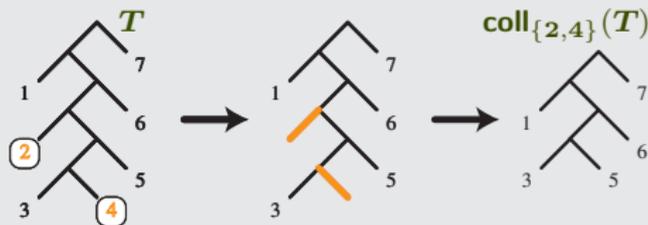
- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
- ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

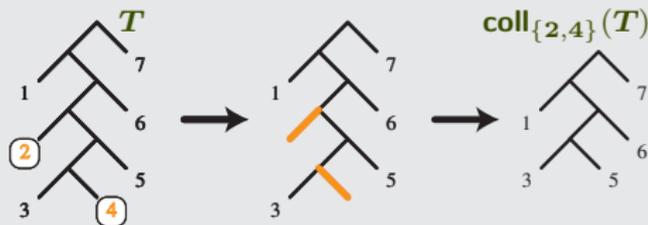
- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

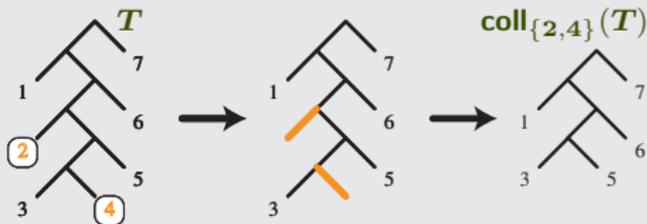
- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$ et on dit que (T, T') est **I -collapsante**.

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :

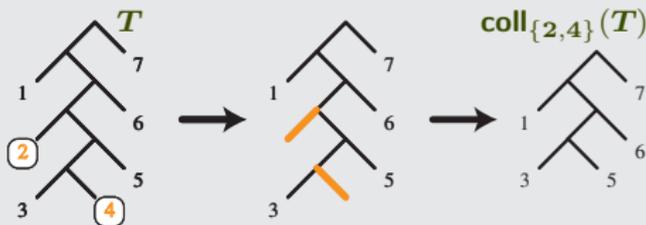


- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$ et on dit que (T, T') est **I -collapsante**.

si le nom est $(a, b, c, d)^+$, se produit pour $[a, b[\subseteq I$ ou $[b, c[\subseteq I$ ou $]c, d]\subseteq I$.

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$ et on dit que (T, T') est **I -collapsante**.

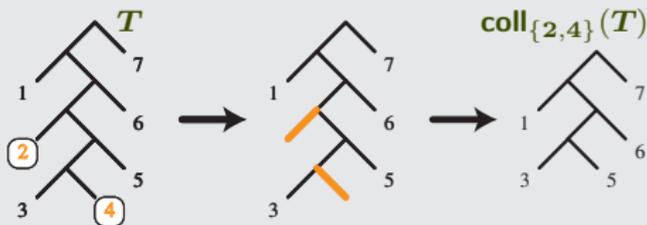
si le nom est $(a, b, c, d)^+$, se produit pour $[a, b[\subseteq I$ ou $[b, c[\subseteq I$ ou $]c, d]\subseteq I$.

- De là:

$$\text{dist}(T, T') \geq \text{dist}(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$$

- Pour pouvoir faire des récurrences descendantes (projections) :

- **Définition** : $\text{coll}_I(T) :=$
effacement dans T
des feuilles dont
l'étiquette est dans I :



- **Lemme** : Si (T, T') est une paire de base, alors
 - ou bien $(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T'))$ est une paire de base,
 - ou bien $\text{coll}_I(T) = \text{coll}_I(T')$ et on dit que (T, T') est **I -collapsante**.

si le nom est $(a, b, c, d)^+$, se produit pour $[a, b] \subseteq I$ ou $[b, c] \subseteq I$ ou $[c, d] \subseteq I$.

- De là:

$$\text{dist}(T, T') \geq \text{dist}(\text{coll}_I(T), \text{coll}_I(T')) + I\text{-dist}(T, T').$$

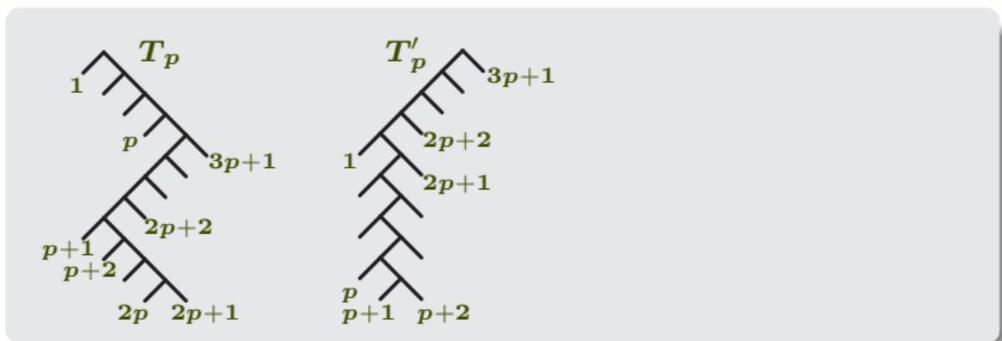
minimal de paires I -collapsantes de T à T'

- Mise en œuvre 1 :

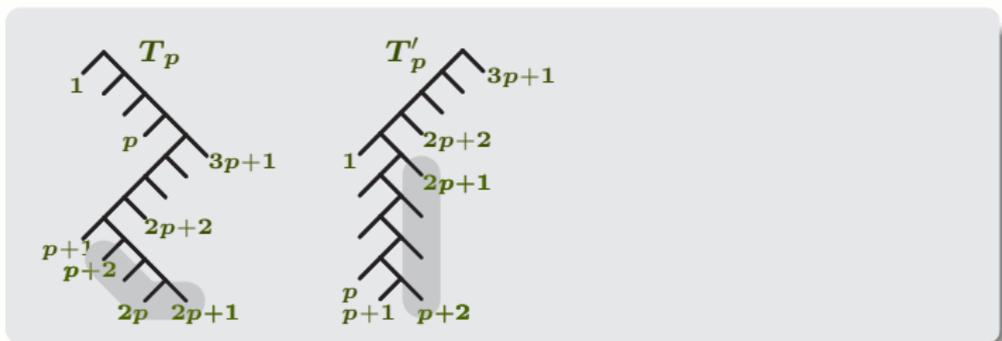
- Mise en œuvre 1 :



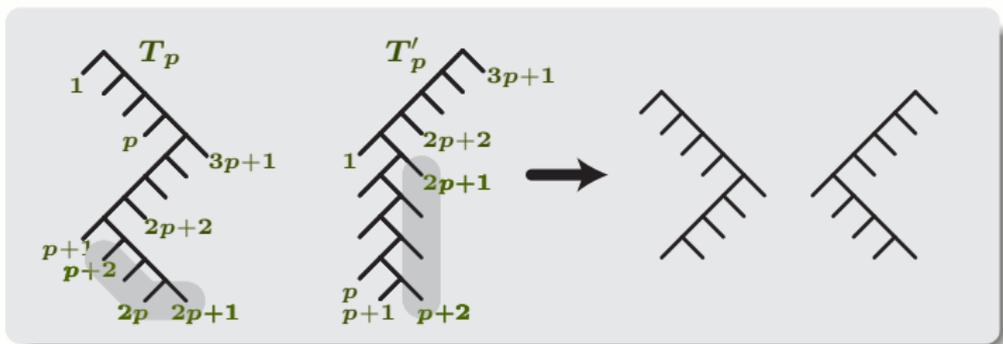
• Mise en œuvre 1 :



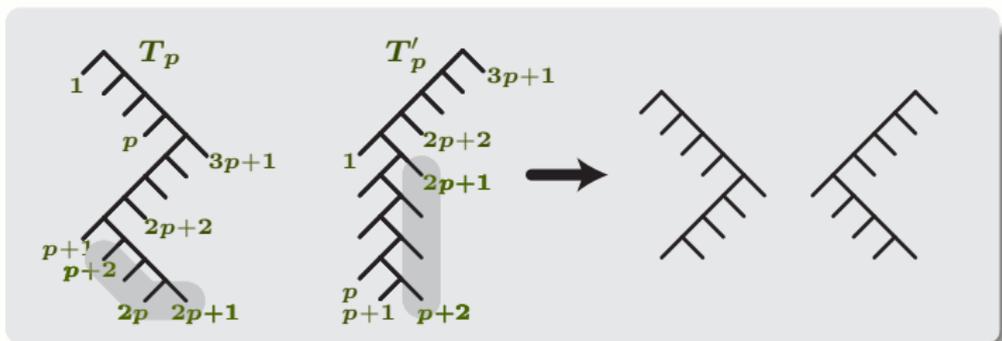
- Mise en œuvre 1 :



- Mise en œuvre 1 :

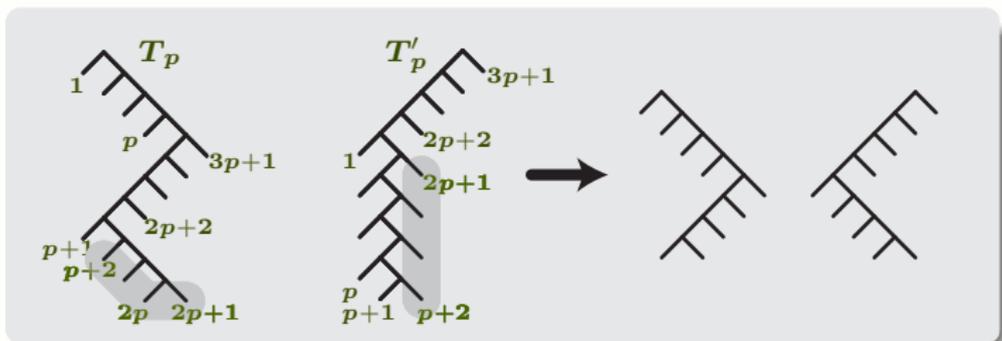


- Mise en œuvre 1 :



- Proposition:** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 5p - 4$.

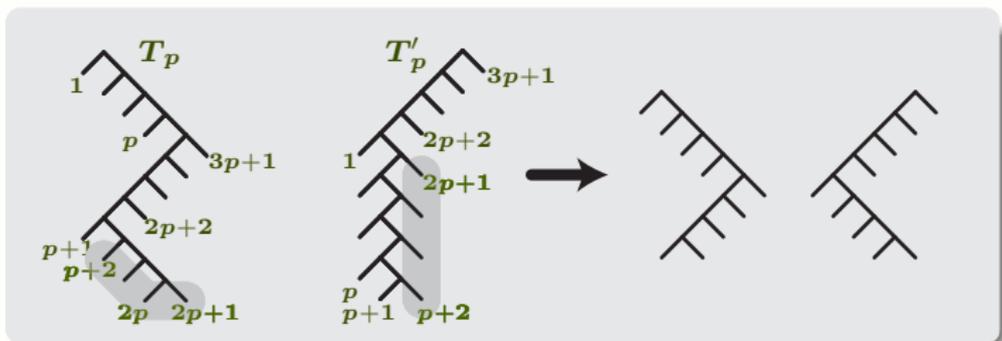
- Mise en œuvre 1 :



- Proposition:** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 5p - 4$.

- Démonstration:** Au moins $2p-2$ paires $\{p+2, 2p+1\}$ -collapsantes de T_p à T'_p ,

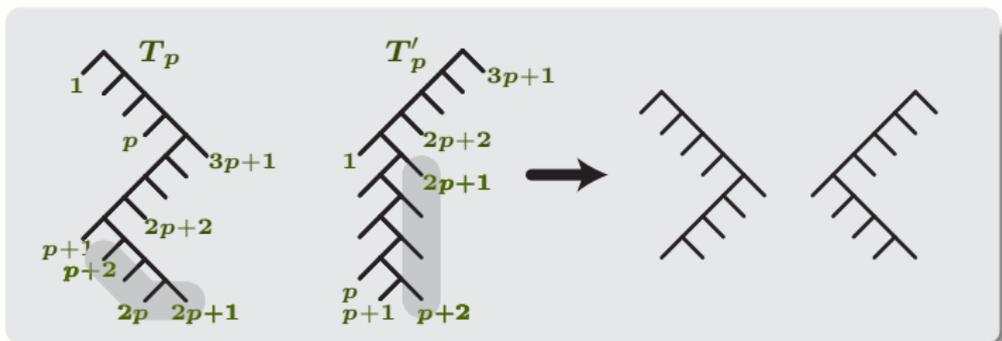
- Mise en œuvre 1 :



- Proposition:** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 5p - 4$.

- Démonstration:** Au moins $2p-2$ paires $\{p+2, 2p+1\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (3p-2) + (2p-2)$. \square

- Mise en œuvre 1 :



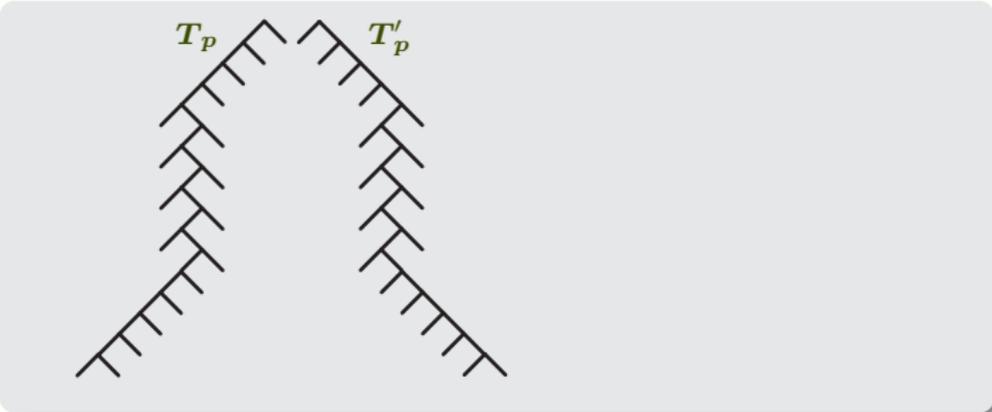
- Proposition:** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 5p - 4$.

- Démonstration:** Au moins $2p-2$ paires $\{p+2, 2p+1\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (3p-2) + (2p-2)$. \square

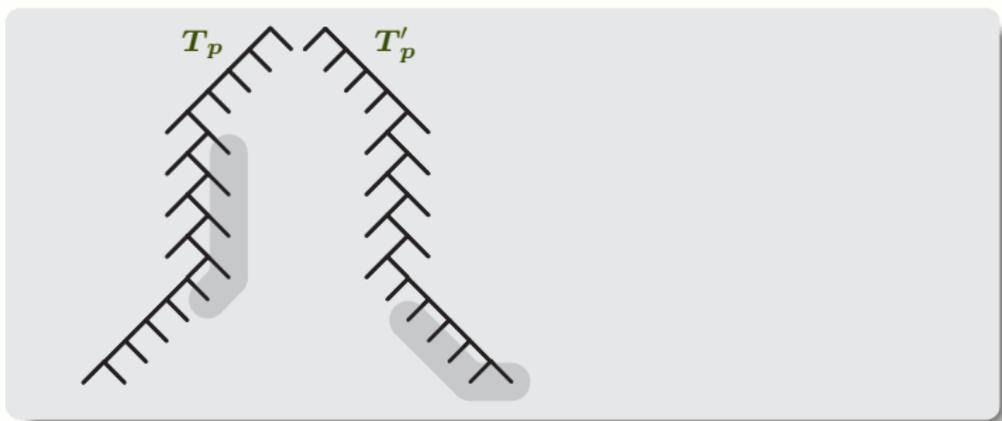
- Corollaire:** $d(n) \geq \frac{5}{3}n - 3$.

- Mise en œuvre 2 :

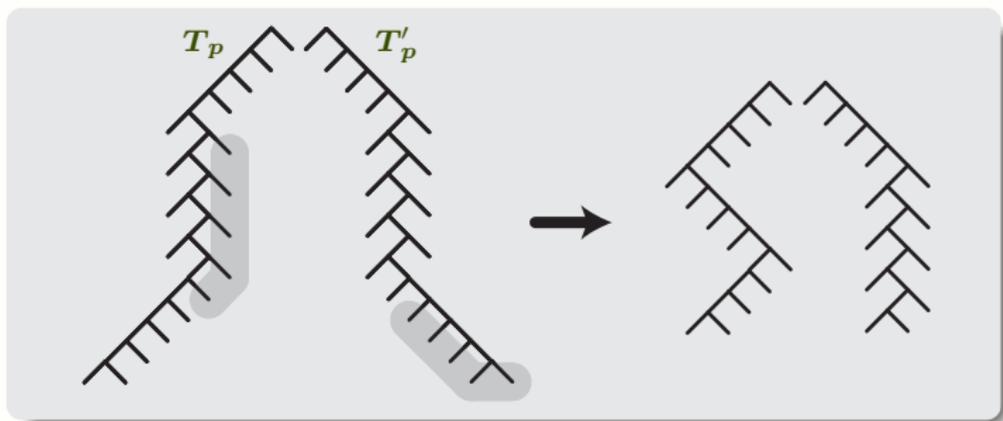
● Mise en œuvre 2 :



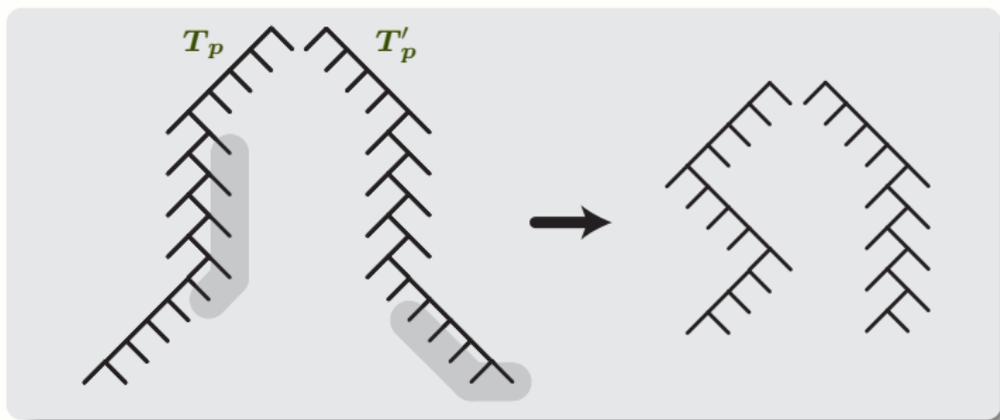
- Mise en œuvre 2 :



- Mise en œuvre 2 :

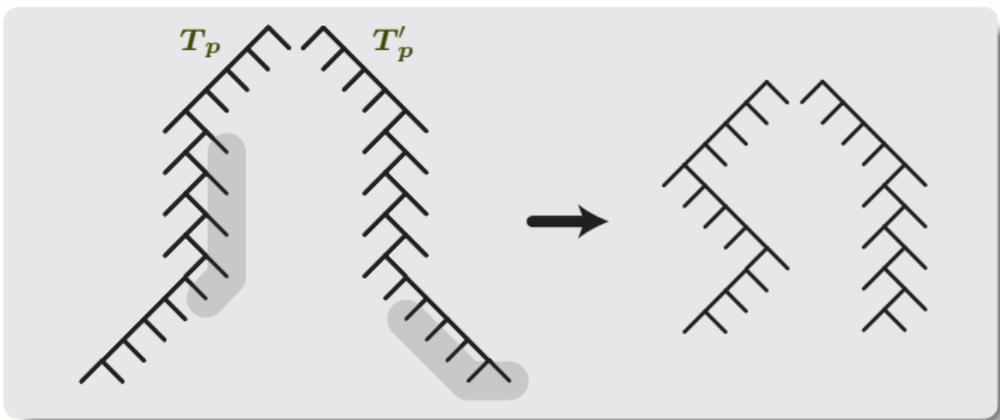


- Mise en œuvre 2 :



- Proposition :** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 7p - 5$.

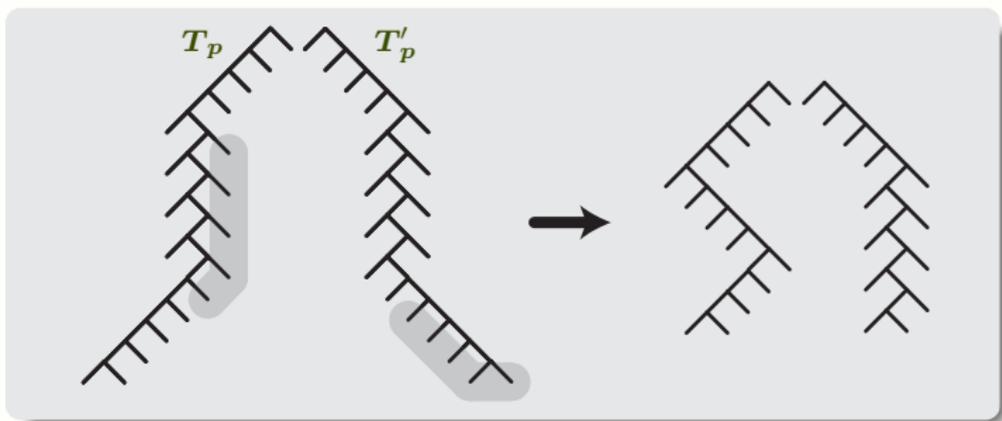
- Mise en œuvre 2 :



- Proposition :** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 7p - 5$.

- Démonstration :** Au moins $2p-1$ paires $\{2p+2, 3p+2\}$ -collapsantes de T_p à T'_p ,

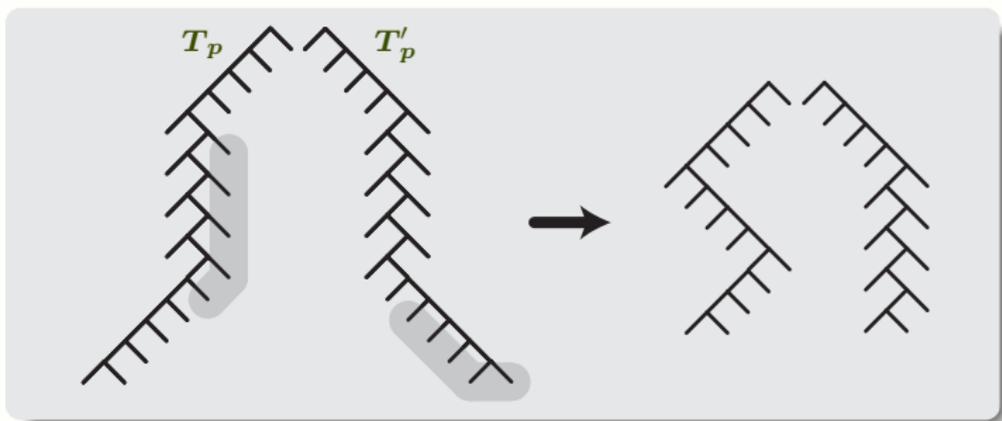
- Mise en œuvre 2 :



- Proposition :** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 7p - 5$.

- Démonstration :** Au moins $2p-1$ paires $\{2p+2, 3p+2\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (5p-4) + (2p-1)$. \square

- Mise en œuvre 2 :



- Proposition :** $\text{dist}(T_p, T'_p) = 7p - 5$.

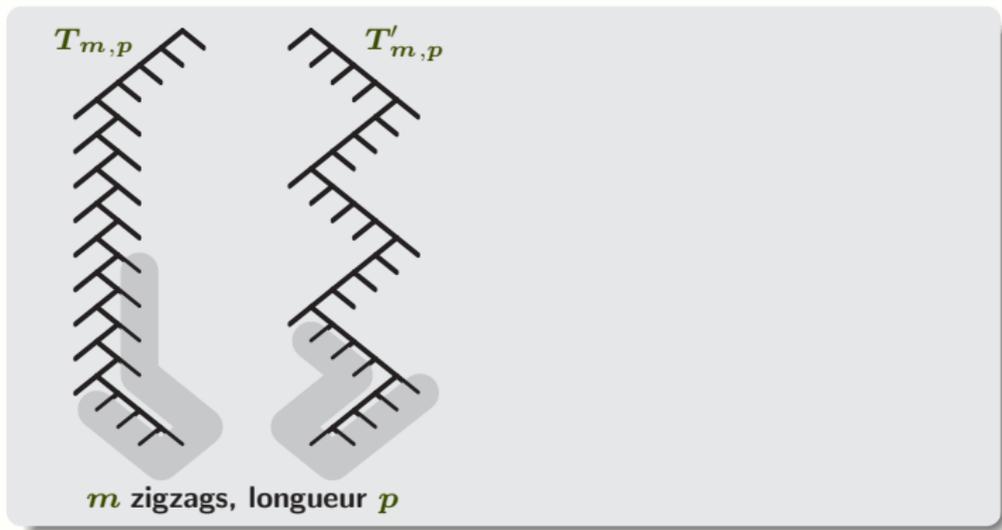
- Démonstration :** Au moins $2p-1$ paires $\{2p+2, 3p+2\}$ -collapsantes de T_p à T'_p , d'où distance $\geq (5p-4) + (2p-1)$. \square

- Corollaire :** $d(n) \geq \frac{7}{4}n - 6$.

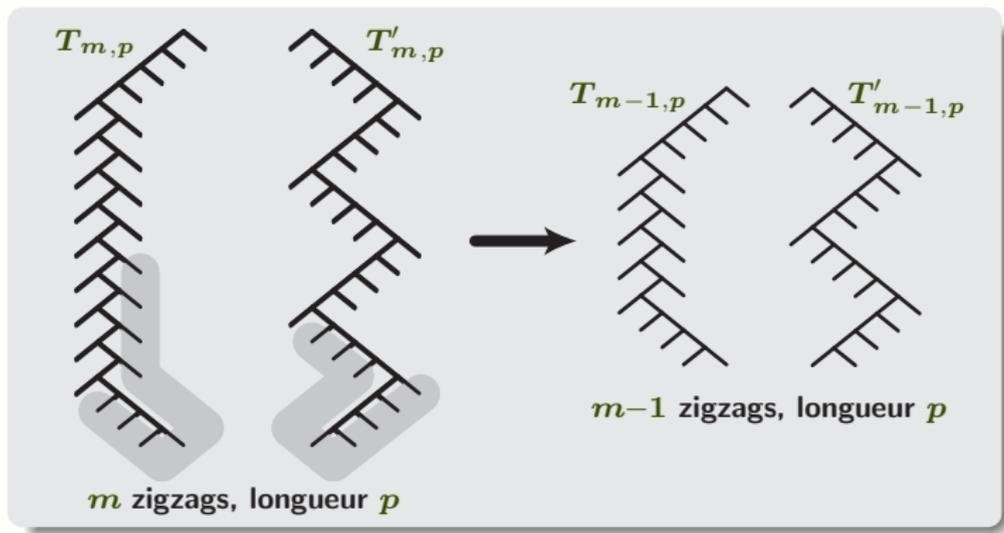
Mise en œuvre 3 :

 $T_{m,p}$  $T'_{m,p}$  m zigzags, longueur p

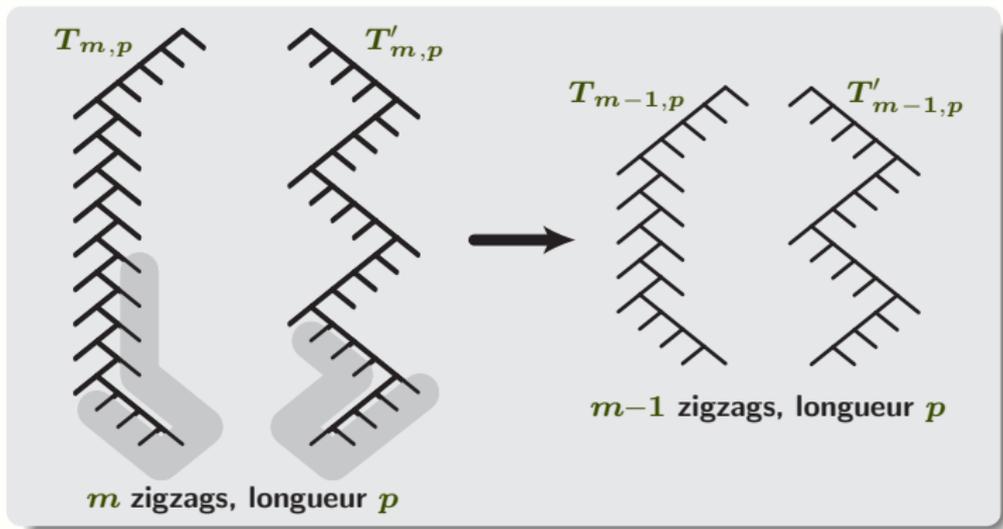
Mise en œuvre 3 :



Mise en œuvre 3 :

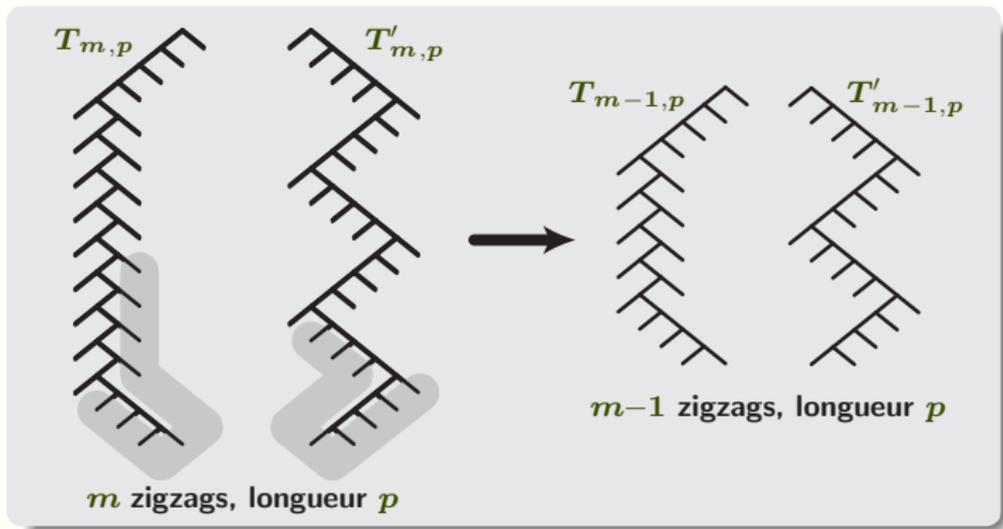


Mise en œuvre 3 :



- **Proposition:** $\text{dist}(T_{m,p}, T'_{m,p}) = 4mp - 3m - p + 1.$

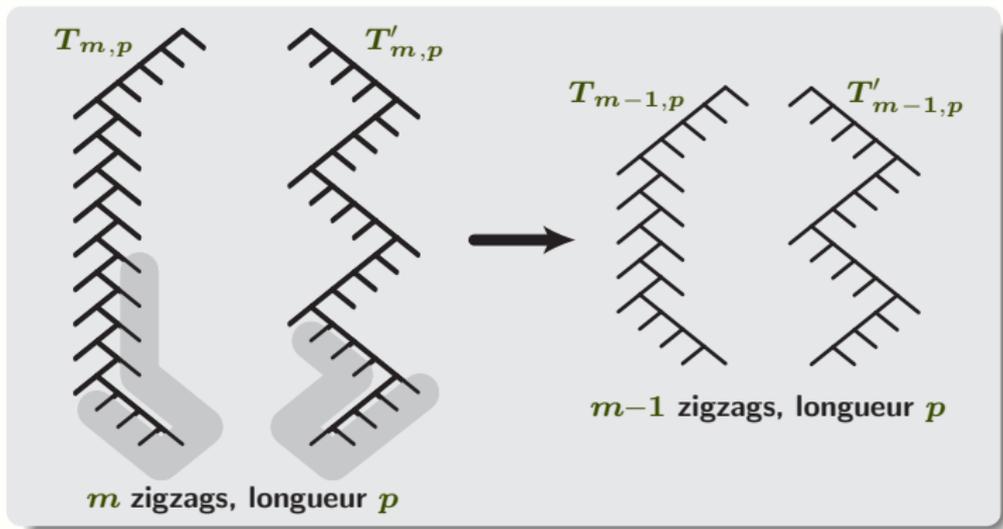
Mise en œuvre 3 :



- **Proposition:** $\text{dist}(T_{m,p}, T'_{m,p}) = 4mp - 3m - p + 1.$

- **Démonstration:** De $T_{m,p}$ à $T'_{m,p}$, au moins $4p-3$ paires $\{(m-1)p+2, (m+1)p+1\}$ -collapsantes,

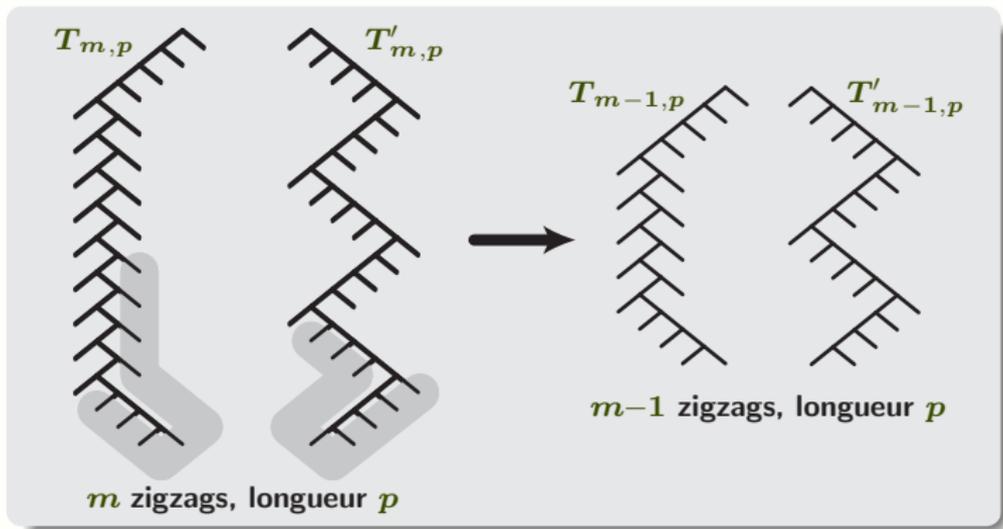
Mise en œuvre 3 :



- **Proposition:** $\text{dist}(T_{m,p}, T'_{m,p}) = 4mp - 3m - p + 1$.

- **Démonstration:** De $T_{m,p}$ à $T'_{m,p}$, au moins $4p-3$ paires $\{(m-1)p+2, (m+1)p+1\}$ -collapsantes, et récurrence sur m . \square

Mise en œuvre 3 :



• **Proposition:** $\text{dist}(T_{m,p}, T'_{m,p}) = 4mp - 3m - p + 1$.

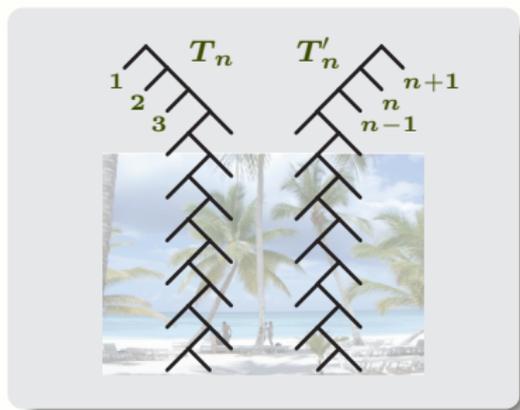
• **Démonstration:** De $T_{m,p}$ à $T'_{m,p}$, au moins $4p-3$ paires $\{(m-1)p+2, (m+1)p+1\}$ -collapsantes, et récurrence sur m . \square

• **Corollaire:** $d(n) \geq 2n - 2\sqrt{2n} + 1$ pour $n = 2m^2$.

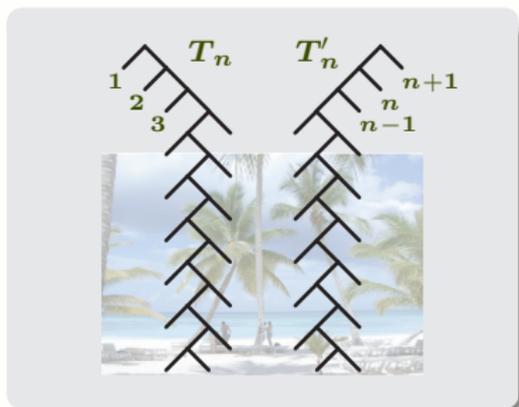
- Une vision du paradis :



- Une vision du paradis :

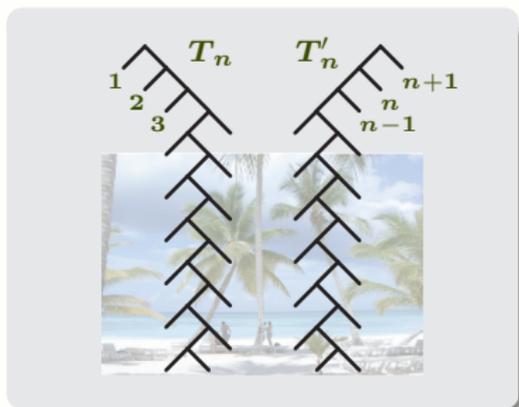


- Une vision du paradis :



- **Conjecture :** $\text{dist}(T_n, T'_n) = 2n - 6$.

- Une vision du paradis :

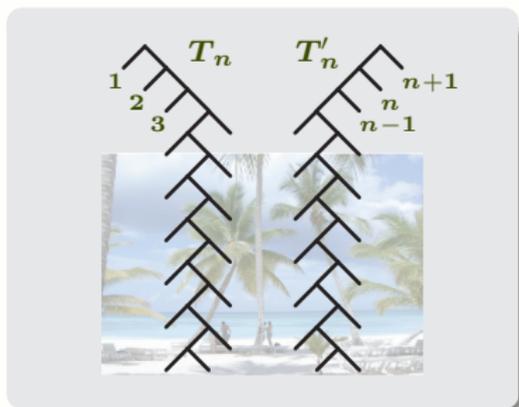


- **Conjecture** : $\text{dist}(T_n, T'_n) = 2n - 6$.

- Références :

D. Sleator, R. Tarjan, W. Thurston, Rotation distance, triangulations,
and hyperbolic geometry, *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988) 647–681

- Une vision du paradis :



- **Conjecture** : $\text{dist}(T_n, T'_n) = 2n - 6$.

- Références :

D. Sleator, R. Tarjan, W. Thurston, Rotation distance, triangulations,
and hyperbolic geometry, *J. Amer. Math. Soc.* 1 (1988) 647–681

P. Dehornoy, On the rotation distance between binary trees,
[arXiv math/CO 0901.2557](https://arxiv.org/abs/math/0901.2557)