

A quoi sert l'infini ?



A quoi sert l'infini ?

Patrick Dehornoy
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen



A quoi sert l'infini ?

Patrick Dehornoy
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

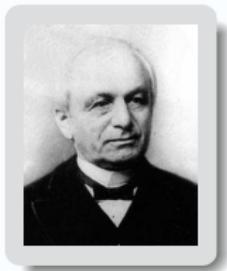
- Quelques exemples sur le rôle de l'infini comme outil de **démonstration**,



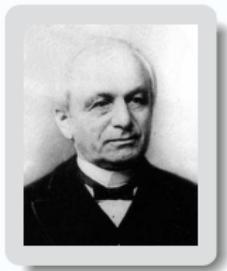
A quoi sert l'infini ?

Patrick Dehornoy
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

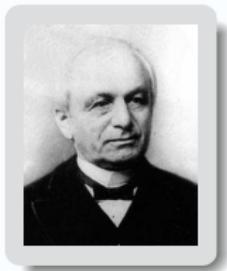
- Quelques exemples sur le rôle de l'infini comme outil de **démonstration**,
et comme outil d'**exploration**.



- L.Kronecker



- L.Kronecker : « Dieu a créé les **nombre**s entiers ;
tout le reste a été créé par l'homme »



- L.Kronecker : « Dieu a créé les **nombre**s entiers ;
tout le reste a été créé par l'homme »

↑
typiquement : l'**infini**



- L.Kronecker : « Dieu a créé les **nombre**s entiers ;
tout le reste a été créé par l'homme »

↑
typiquement : l'**infini**



- G. Cantor : **théorie de l'infini** (« théorie des ensembles »)

- **Question(s)** : Si on ne s'intéresse qu'aux nombres entiers (aux objets finis),
l'infini est-il **nécessaire** ?



- L.Kronecker : « Dieu a créé les **nombre**s entiers ;
tout le reste a été créé par l'homme »

↑
typiquement : l'**infini**



- G. Cantor : **théorie de l'infini** (« théorie des ensembles »)

- **Question(s)** : Si on ne s'intéresse qu'aux nombres entiers (aux objets finis),
l'infini est-il **nécessaire** ? Est-il **utile** ?

Partie I : L'infini est-il nécessaire ?

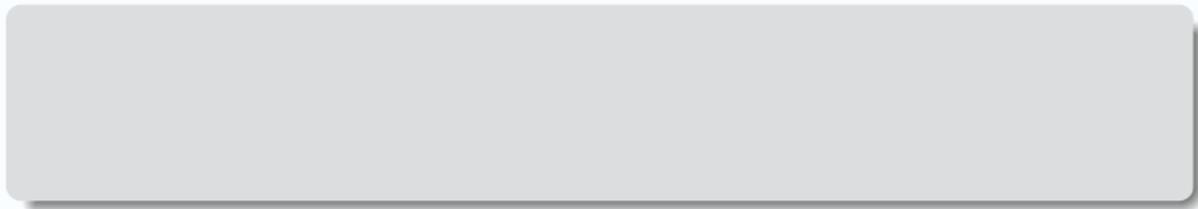
Partie I : L'infini est-il nécessaire ?

« L'infini peut-il être nécessaire pour démontrer des propriétés des objets finis ? »

Partie I : L'infini est-il nécessaire ?

« L'infini peut-il être nécessaire pour démontrer des propriétés des objets finis ? »

- **Oui** : même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis, le recours à l'infini est nécessaire pour certaines démonstrations.



- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)

- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)

- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,
(un hexagone a neuf diagonales, 17 est un nombre premier,...)

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)

- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,
(un hexagone a neuf diagonales, 17 est un nombre premier,...)
d'autres mettent en jeu **au moins un objet infini**.

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)

- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,
(un hexagone a neuf diagonales, 17 est un nombre premier,...)
d'autres mettent en jeu **au moins un objet infini**.
(il y a plus de points dans une droite que de nombres entiers,...)

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)
- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,
(un hexagone a neuf diagonales, 17 est un nombre premier,...)
d'autres mettent en jeu **au moins un objet infini**.
(il y a plus de points dans une droite que de nombres entiers,...)
- Pour des assertions ne mettant en jeu que des objets finis,
certaines **démonstrations** ne mettent en jeu que des objets finis,

↙ = peuvent être **comptés**, dénombrés

- Certains **objets** mathématiques sont **finis**,
(les sommets d'un carré, les paires d'entiers inférieurs à 5,...)
d'autres sont **infinis**.
(les entiers pris dans leur ensemble, les points d'une droite,...)
- Certaines **assertions** ne mettent en jeu **que des objets finis**,
(un hexagone a neuf diagonales, 17 est un nombre premier,...)
d'autres mettent en jeu **au moins un objet infini**.
(il y a plus de points dans une droite que de nombres entiers,...)
- Pour des assertions ne mettant en jeu que des objets finis,
certaines **démonstrations** ne mettent en jeu que des objets finis,
d'autres mettent en jeu (aux étapes intermédiaires) des objets infinis.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.
- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.
- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.
- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.
 - Chaque diagonale est comptée deux fois ;

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

• **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

• **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, **pas** d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.

• **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

• **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

• **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.

$$\frac{(2n)!}{n!^2}$$


- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.

- De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.

- Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.

$$\frac{(2n)!}{n!^2}$$



- **Démonstration** : Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets.

• **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.
 - Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

• **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.



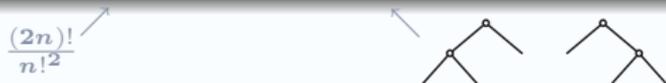
- **Démonstration** : Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets.
 - Posons $F(X) = \sum_1^\infty a_n X^n$.

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.
 - Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.



- **Démonstration** : Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets.
 - Posons $F(X) = \sum_1^\infty a_n X^n$.
 - La série $F(X)$ satisfait l'équation du second degré $X(F(X))^2 - F(X) + 1 = 0$.

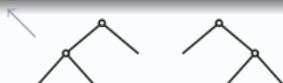
- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.
 - Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.

$$\frac{(2n)!}{n!^2}$$



- **Démonstration** : Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets.
 - Posons $F(X) = \sum_1^\infty a_n X^n$.
 - La série $F(X)$ satisfait l'équation du second degré $X(F(X))^2 - F(X) + 1 = 0$.
 - On a donc $F(X) = (1 - \sqrt{1 - 4X})/2X$, d'où $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. □

- **Assertion 1** : Il existe $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales dans un polygone à n côtés.

- **Démonstration** : Soit a_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés.
 - De chacun des n sommets partent $n - 3$ diagonales.
 - Chaque diagonale est comptée deux fois ; on a donc $2a_n = n(n - 3)$. □

Ici, pas d'usage de l'infini : un seul nombre a_n à la fois.

- **Assertion 2** : Il existe $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ arbres binaires à n sommets.

$$\frac{(2n)!}{n!^2}$$



- **Démonstration** : Soit a_n le nombre d'arbres à n sommets.
 - Posons $F(X) = \sum_1^\infty a_n X^n$.
 - La série $F(X)$ satisfait l'équation du second degré $X(F(X))^2 - F(X) + 1 = 0$.
 - On a donc $F(X) = (1 - \sqrt{1 - 4X})/2X$, d'où $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. □

Ici, usage de l'infini : tous les nombres a_n à la fois.

- Peut-on éviter les exemples du second type ?

- Peut-on éviter les exemples du second type ?

« Toute assertion (vraie) ne mettant en jeu que des objets *finis* peut-elle être démontrée en n'utilisant que des objets *finis* ? »

- Peut-on éviter les exemples du second type ?

« Toute assertion (vraie) ne mettant en jeu que des objets **finis**
peut-elle être démontrée en n'utilisant que des objets **finis** ? »

↑
« des méthodes finitistes »

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano PA
(propriétés de base de + et \times sur \mathbb{N} et récurrence)

- Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931) :

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931) :**
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.
- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.
- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.
- Des exemples ?

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si S est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans S .
- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.
- Des exemples ? Les **formules de Gödel**

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.
- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.
- Des exemples ? Les **formules de Gödel** (codages du **paradoxe du menteur**)

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)

- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.

- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.

- Des exemples ? Les **formules de Gödel** (codages du **paradoxe du menteur**)
- Des exemples **naturels** ?

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)
- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.
- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.
- Des exemples ? Les **formules de Gödel** (codages du **paradoxe du menteur**)
- Des exemples **naturels** ?
↪ des énoncés d'arithmétique **vrais** non démontrables dans **PA**

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)

- **Premier théorème d'incomplétude** (Gödel, 1931) :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.

- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.

- Des exemples ? Les **formules de Gödel** (codages du **paradoxe du menteur**)

- Des exemples **naturels** ?

↪ des énoncés d'arithmétique **vrais** non démontrables dans **PA**

↑
?????

- Une approximation raisonnable :
finitistement démontrable = démontrable dans le système de Peano **PA**
(propriétés de base de $+$ et \times sur \mathbb{N} et récurrence)

- **Premier théorème d'incomplétude (Gödel, 1931)** :
Si **S** est un système formel non-contradictoire, explicite, et incluant **PA**,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **S**.

- **Corollaire** : Si le système **PA** est non-contradictoire,
il existe des assertions vraies mais non démontrables dans **PA**.

- Des exemples ? Les **formules de Gödel** (codages du **paradoxe du menteur**)
- Des exemples **naturels** ?

↪ des énoncés d'arithmétique **vrais** non démontrables dans **PA**

↑
?????

↑
démonstrables en utilisant l'infini

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

- Ecriture d'un entier en base p itérée :

$$26 = [11010]_2$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

← écriture en base **2**

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$\begin{aligned} 26 &= [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \\ &= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \end{aligned}$$

← écriture en base **2**

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$\begin{aligned} 26 &= [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \\ &= 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2 \end{aligned}$$

← écriture en base **2**

← écriture en base **2 itérée**

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1$$

← écriture en base **2**

$$= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2$$

← écriture en base **2 itérée**

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$\begin{aligned} 26 &= [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 && \leftarrow \text{écriture en base } 2 \\ &= 2^{2^2} + 2^{2^1} + 2 && \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée} \end{aligned}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Exemple :

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Exemple :

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \xrightarrow{T_{2,3}}$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Exemple :

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Exemple :

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3 = 7.625.597.485.071$$

- Ecriture d'un entier en **base p itérée** :

$$26 = [11010]_2 = 2^4 + 2^3 + 2^1 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2$$

$$= 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2 \quad \leftarrow \text{écriture en base } 2 \text{ itérée}$$

- **Définition** : Pour $p < q$, transformation $T_{p,q}$:
= remplacer p par q dans l'écriture en base p itérée.

- Exemple :

$$26 = 2^{2^2} + 2^{2^1+1} + 2 \xrightarrow{T_{2,3}} 3^{3^3} + 3^{3^1+1} + 3 = 7.625.597.485.071$$

(une fonction très croissante...)

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :

d

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :

$$d \rightarrow T_{2,3} \rightarrow \dots$$

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26,

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071,

- **Définition** : La **suite de Goodstein** partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071, 7.625.597.485.070, ...

- **Définition** : La **suite de Goodstein** partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071, 7.625.597.485.070, ...

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071, 7.625.597.485.070, ...

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.



- **Théorème** (Goodstein, 1942) :

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071, 7.625.597.485.070, ...

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.



- **Théorème** (Goodstein, 1942) :

Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur

- **Définition** : La suite de Goodstein partant de d :



- Exemple : partant de **26** :

26, 7.625.597.485.071, 7.625.597.485.070, ...

Clairement : la suite tend (très) vite vers l'infini.



- **Théorème** (Goodstein, 1942) :

Quel que soit d , la suite de Goodstein partant de d atteint après un nombre fini d'étapes la valeur **0**.

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
 - ↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

0

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

0 , 1

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

0 , 1 , 2

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

0 , **1** , **2** , ..., ω

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?
↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega.2, \\ \omega.2+1, \dots, \omega.3$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\ \dots, \omega^2 \cdot 2$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$\begin{aligned}
 &0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\
 &\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\
 &\dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3
 \end{aligned}$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$\begin{aligned}
 &0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\
 &\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\
 &\dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega
 \end{aligned}$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$\begin{aligned}
 &0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\
 &\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\
 &\dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}
 \end{aligned}$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$\begin{aligned}
 &0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\
 &\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\
 &\dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots
 \end{aligned}$$

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$\begin{aligned}
 &0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\
 &\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\
 &\dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots
 \end{aligned}$$

- Les ordinaux de Cantor existent-ils ?

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\ \dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

- Les ordinaux de Cantor existent-ils ?



- (**Zermelo, Von Neumann**, 1905–1920)
Dès qu'on postule l'existence d'au moins un ensemble infini, les ordinaux de Cantor existent (avec les propriétés escomptées).

- Démontrer le théorème de Goodstein en utilisant l'infini ?

↪ Utiliser les **ordinaux de Cantor**.



- Les ordinaux de **Cantor** (1880-86) : un prolongement de la suite des entiers naturels dans lequel toute famille non vide a un plus petit élément :

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega+1, \omega+2, \dots, \omega+\omega = \omega \cdot 2, \\ \omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^2 + \omega, \\ \dots, \omega^2 \cdot 2, \dots, \omega^2 \cdot \omega = \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

- Les ordinaux de Cantor existent-ils ?



- (**Zermelo, Von Neumann**, 1905–1920)
Dès qu'on postule l'existence d'au moins un ensemble infini, les ordinaux de Cantor existent (avec les propriétés escomptées).

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante :

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément.

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :

d

- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



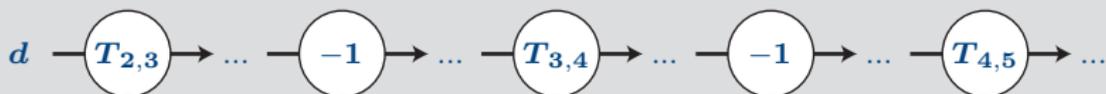
- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



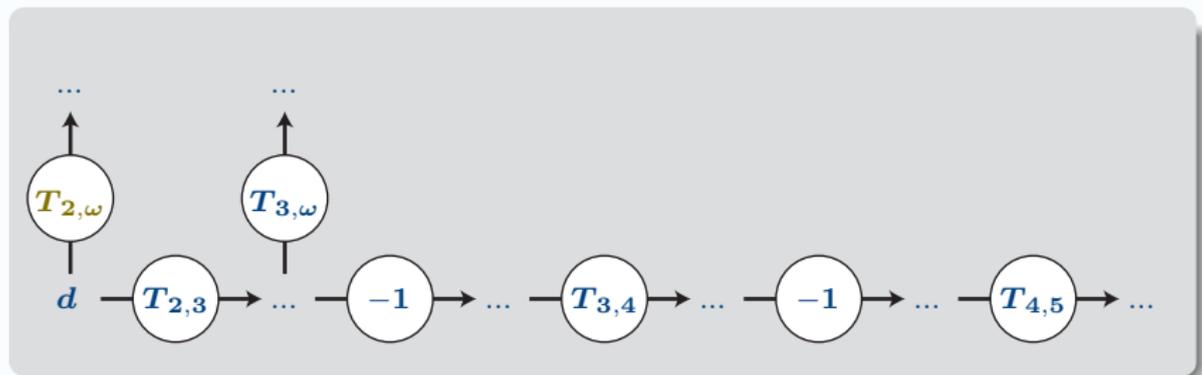
- **Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



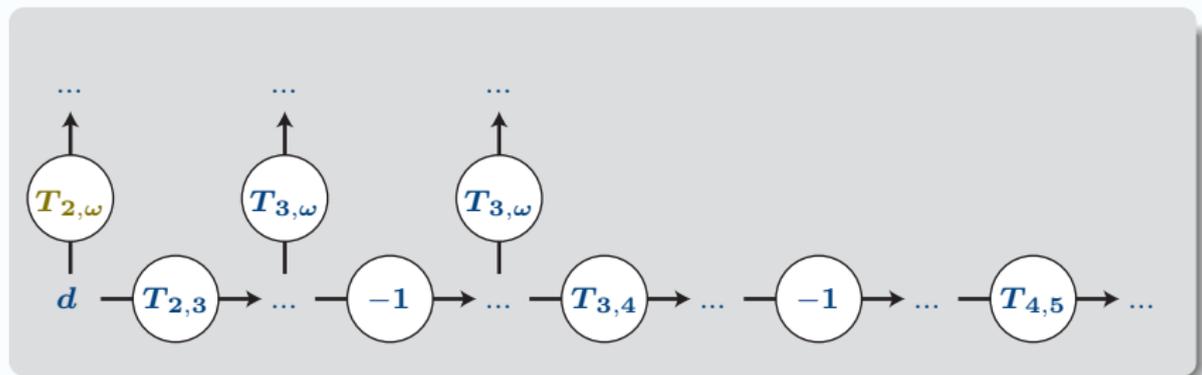
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



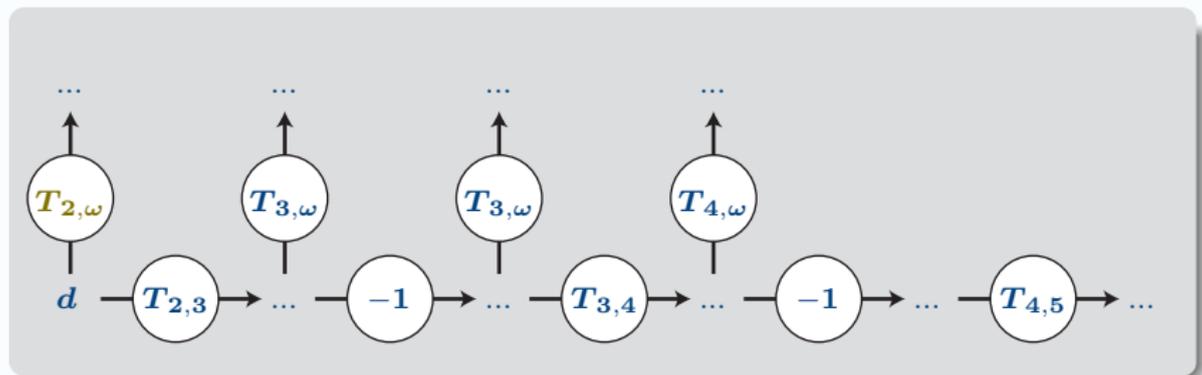
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



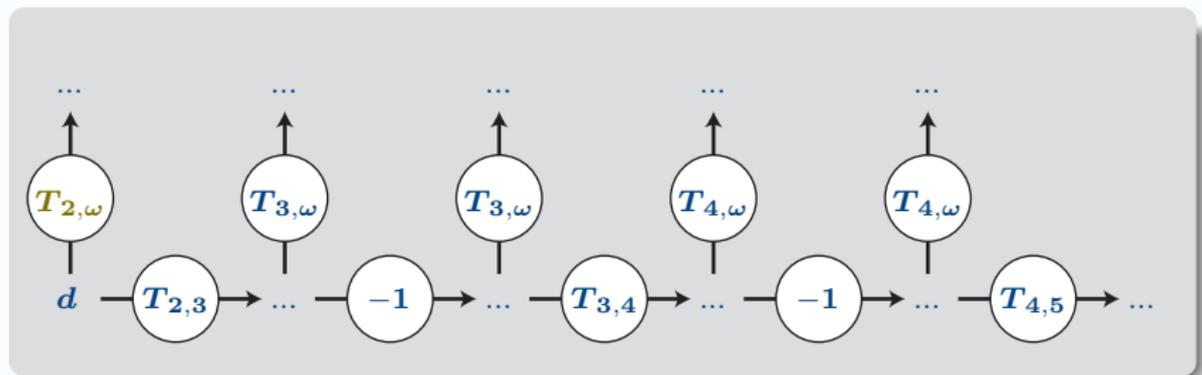
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



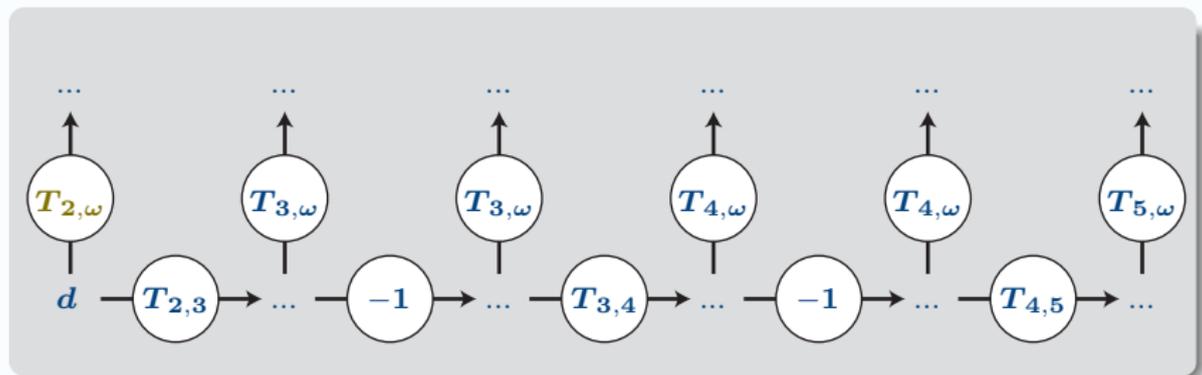
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



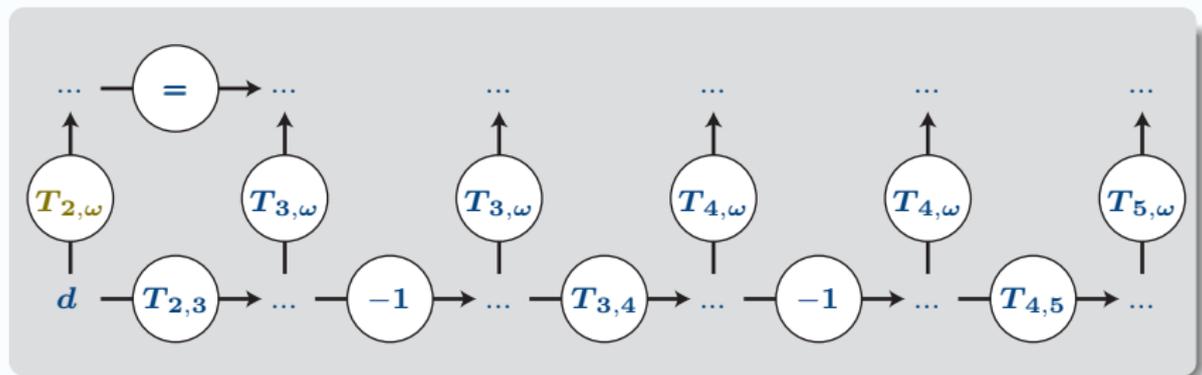
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



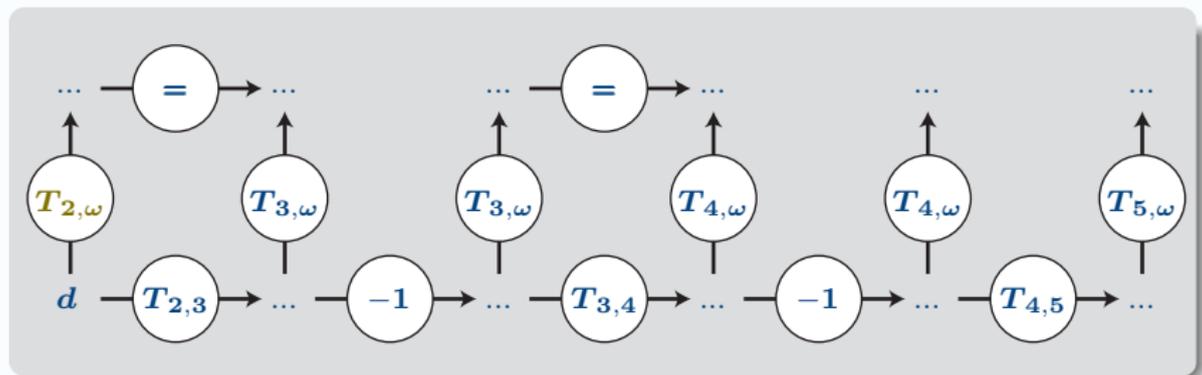
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



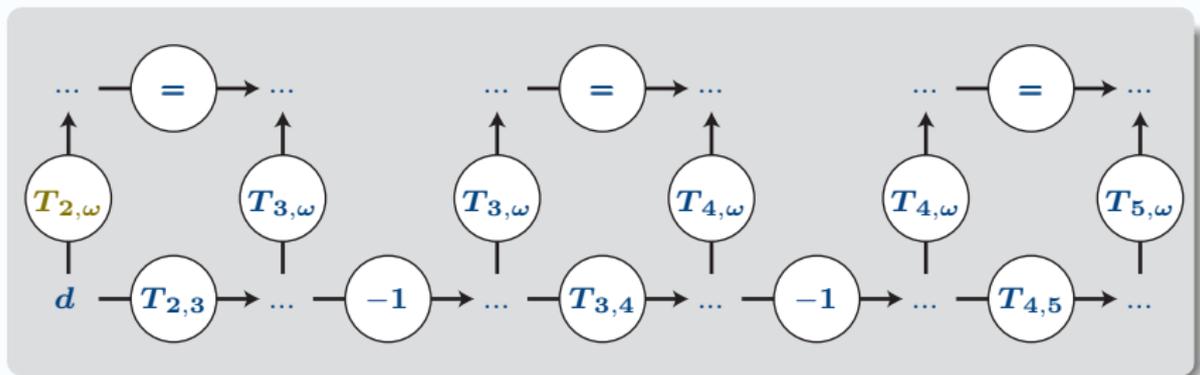
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



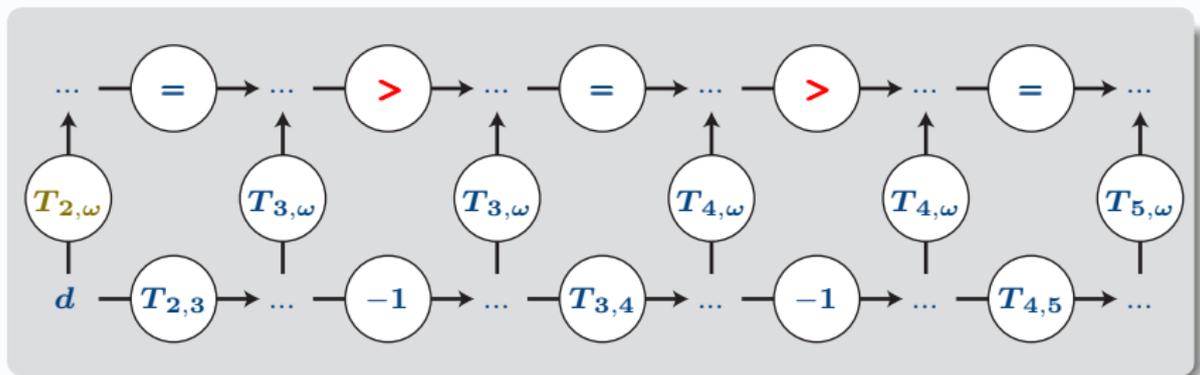
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



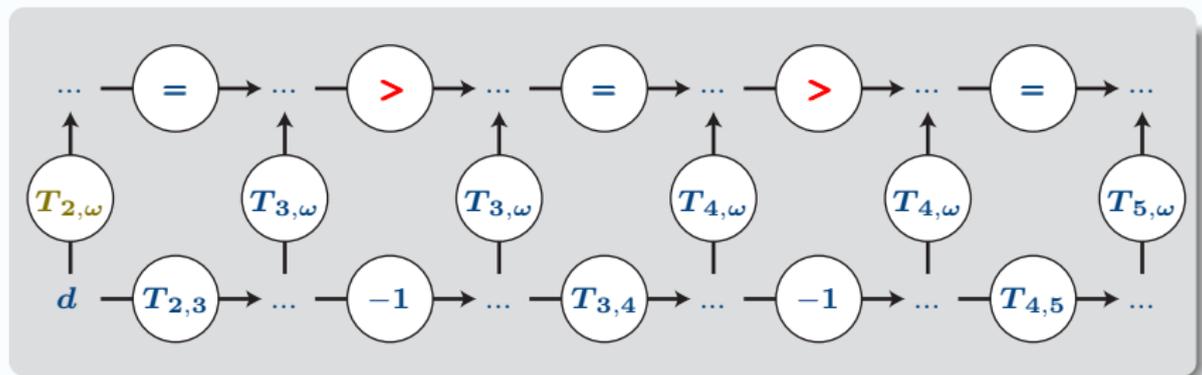
- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

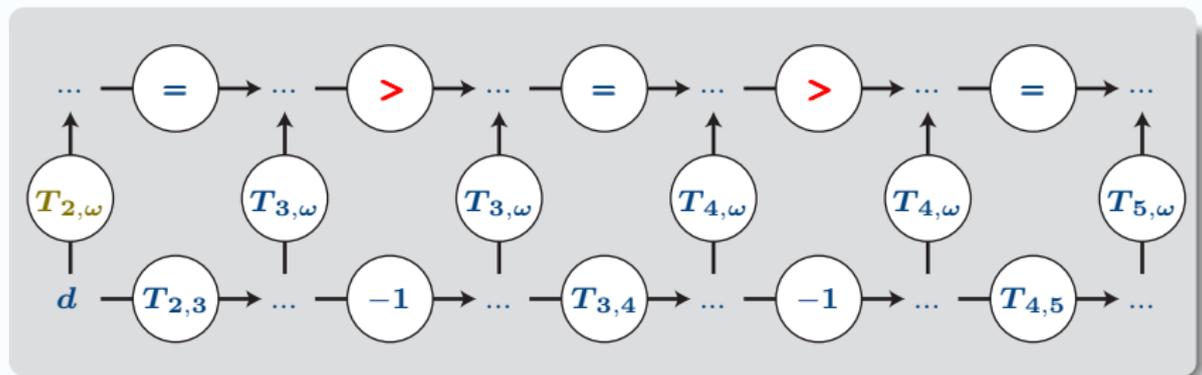
Considérons la suite de Goodstein partant de d :



Forcément, en haut, on arrive à **0** au bout d'un nombre fini d'étapes,

- Démonstration** : Il n'existe pas de suite infinie d'ordinaux strictement décroissante : si on a $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, l'ensemble $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ n'a pas de plus petit élément. Donc : toute suite strictement décroissante d'ordinaux est **finie**.

Considérons la suite de Goodstein partant de d :



Forcément, en haut, on arrive à **0** au bout d'un nombre fini d'étapes, et la seule possibilité est que, en bas, on arrive à **0** au même moment. \square

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?
- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

≈ non démontrable par récurrence

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

≈ non démontrable par récurrence

≈ non démontrable sans infini

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

≈ non démontrable par récurrence

≈ non démontrable sans infini

- (Principe de la démonstration: La fonction de Goodstein croît si vite qu'elle dépasse toute fonction dont l'existence est démontrable dans PA.)

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

≈ non démontrable par récurrence

≈ non démontrable sans infini

- (Principe de la démonstration: La fonction de Goodstein croît si vite qu'elle dépasse toute fonction dont l'existence est démontrable dans PA.)

- Le théorème de Goodstein est un exemple de «vrai» résultat d'arithmétique qui ne peut pas être démontré sans introduire l'infini.

- Démontrer le théorème de Goodstein sans l'infini ?

- **Théorème (Kirby–Paris, 1982)** : Le théorème de Goodstein ne peut **pas** être démontré dans le système de Peano **PA**.

≈ non démontrable par récurrence

≈ non démontrable sans infini

- (Principe de la démonstration: La fonction de Goodstein croît si vite qu'elle dépasse toute fonction dont l'existence est démontrable dans PA.)

- Le théorème de Goodstein est un exemple de «vrai» résultat d'arithmétique qui ne peut pas être démontré sans introduire l'infini.

... et il y a même bien pire...

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs ([Cantor](#), 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers),

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- Programme de Gödel :

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini < infini

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini < infini < super-infini

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini < infini < super-infini < hyper-infini

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini < infini < super-infini < hyper-infini < ultra-infini < ...

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« **grands cardinaux** ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :
fini < infini < **super-infini** < **hyper-infini** < **ultra-infini** < ...



- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

$$\text{fini} < \text{infini} < \text{super-infini} < \text{hyper-infini} < \text{ultra-infini} < \dots$$



- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

$$\text{fini} < \text{infini} < \text{super-infini} < \text{hyper-infini} < \text{ultra-infini} < \dots$$
- L'existence d'un infini ne garantit pas celle des super-infinis



- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.

- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

fini < infini < super-infini < hyper-infini < ultra-infini < ...

- L'existence d'un infini ne garantit pas celle des super-infinis

↪ purement spéculatif (?)



- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.
- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

$$\text{fini} < \text{infini} < \text{super-infini} < \text{hyper-infini} < \text{ultra-infini} < \dots$$
- L'existence d'un infini ne garantit pas celle des super-infinis
 ↪ purement spéculatif (?)



- (H. Friedman, 1980–2012)

- Dès qu'il existe un infini, il en existe plusieurs (Cantor, 1873 : l'infini des nombres réels n'est pas celui des nombres entiers), et même une infinité.

- **Programme de Gödel** : Au-delà des infinis accessibles (ceux qui existent dès qu'on postule l'existence d'un ensemble infini), introduire des super-infinis (« grands cardinaux ») dont chacun dépasse les précédents comme l'infini dépasse le fini :

fini < infini < super-infini < hyper-infini < ultra-infini < ...

- L'existence d'un infini ne garantit pas celle des super-infinis

↪ purement spéculatif (?)



- (H. Friedman, 1980–2012) Des analogues du théorème de Goodstein: des résultats de théorie des graphes finis démontrables à partir de l'existence de divers super-infinis, mais pas sans.



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** :

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini,

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au **fini**,
l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas)
un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** :

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au **fini**,
l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas)
un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis,

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au **fini**, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis, ils restent assez **marginiaux**...

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au **fini**, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis, ils restent assez **marginiaux**...

(Depuis 4, la suite de Goodstein atteint 0 en...

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis, ils restent assez **marginiaux**...

(Depuis 4, la suite de Goodstein atteint 0 en... $3 \times 2^{402.653.211} - 3$ étapes.)

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au **fini**, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis, ils restent assez **marginiaux**...

(Depuis 4, la suite de Goodstein atteint 0 en... $3 \times 2^{402.653.211} - 3$ étapes.)

- Rien n'interdit que des énoncés « vraiment » importants exigent l'usage de l'(ultra)-infini pour être démontrés,

entiers, graphes...



- **Résumé** : Il existe des assertions ne mettant en jeu que des objets finis, démontrables si on postule l'existence d'objets (super)-infinis, mais **pas** sinon.

- **Conclusion de la partie 1** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini, l'infini — ou même l'ultra-infini — est (dans certains cas) un outil de démonstration indispensable.

- Un **bémol** : Même si les théorèmes de Goodstein et Friedman sont explicites et ne mettent en jeu que des objets finis, ils restent assez **marginiaux**...

(Depuis 4, la suite de Goodstein atteint 0 en... $3 \times 2^{402.653.211} - 3$ étapes.)

- Rien n'interdit que des énoncés « vraiment » importants exigent l'usage de l'(ultra)-infini pour être démontrés, mais, à ce jour, ce n'est pas (encore) arrivé.

Partie II : L'infini est-il utile ?

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

- **Oui** : l'usage de l'(ultra)-infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** et même pour **découvrir** des propriétés des objets finis.

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

- Oui : l'usage de l'(ultra)-infini donne des moyens supplémentaires pour démontrer et même pour découvrir des propriétés des objets finis.
- Ordre bizarre : pourquoi après la première partie ?

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

- Oui : l'usage de l'(ultra)-infini donne des moyens supplémentaires pour démontrer et même pour découvrir des propriétés des objets finis.
- Ordre bizarre : pourquoi après la première partie ? « utile < nécessaire » ?

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

- **Oui** : l'usage de l'(ultra)-infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** et même pour **découvrir** des propriétés des objets finis.
- **Ordre bizarre** : pourquoi **après** la première partie ? « utile < nécessaire » ?
 - Réponse 1 : L'infini est utile comme outil de démonstration ;

Partie II : L'infini est-il utile ?

« Même quand il n'est pas nécessaire, l'(ultra)-infini peut-il être utile ? »

- **Oui** : l'usage de l'(ultra)-infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** et même pour **découvrir** des propriétés des objets finis.
- **Ordre bizarre** : pourquoi **après** la première partie ? « utile < nécessaire » ?
 - Réponse 1 : L'infini est utile comme outil de démonstration ;
 - Réponse 2 : L'infini, et même l'**ultra-infini**, est utile comme **outil d'exploration**.

- **Théorème** : Le nombre de nombres premiers $\leq n$ est approximativement $\frac{n}{\log n}$.

- **Théorème** : Le nombre de nombres premiers $\leq n$ est approximativement $\frac{n}{\log n}$.

- Conjecturé par **Gauss** en 1792



- Démontré par des méthodes infinitistes
par **Hadamard** et **de la Vallée-Poussin** en 1896



- **Théorème** : Le nombre de nombres premiers $\leq n$ est approximativement $\frac{n}{\log n}$.

- Conjecturé par **Gauss** en 1792



analyse complexe



- Démonstré par des méthodes infinitistes par **Hadamard** et de la **Vallée-Poussin** en 1896



- **Théorème** : Le nombre de nombres premiers $\leq n$ est approximativement $\frac{n}{\log n}$.

- Conjecturé par **Gauss** en 1792



analyse complexe



- Démontré par des méthodes infinitistes
par **Hadamard** et de la **Vallée-Poussin** en 1896
- Démontré par des méthodes finitistes
par **Erdős** et **Selberg** en 1949.



- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- Affirmé par **Fermat** en 1637



- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- Affirmé par **Fermat** en 1637



- Démontré par des méthodes infinitistes par **Wiles** en 1994



- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- Affirmé par **Fermat** en 1637



- Démontré par des méthodes infinitistes par **Wiles** en 1994

↑
théorie de **Grothendieck**



- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- Affirmé par **Fermat** en 1637



- Démontré par des méthodes infinitistes par **Wiles** en 1994

↑
théorie de **Grothendieck**

↑
utilise l'infini, et même un peu de **super-infini**



- **Théorème** : L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution non triviale pour $n \geq 3$.

- Affirmé par **Fermat** en 1637



- Démontré par des méthodes infinitistes par **Wiles** en 1994

↑
théorie de **Grothendieck**

↑
utilise l'infini, et même un peu de **super-infini**



- Encore incertain si démontrable par des moyens purement finitistes
(travaux en cours de **Macintyre** et autres)

- Donc : l'usage de l'infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** des propriétés des objets finis (ici : les nombres entiers).

- Donc : l'usage de l'infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** des propriétés des objets finis (ici : les nombres entiers).

... une **banalité** :

- Donc : l'usage de l'infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** des propriétés des objets finis (ici : les nombres entiers).

... une **banalité** : toute utilisation des nombres réels
et de l'analyse est une utilisation de l'infini !

- Donc : l'usage de l'infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** des propriétés des objets finis (ici : les nombres entiers).

... une **banalité** : toute utilisation des nombres réels et de l'analyse est une utilisation de l'infini !

- Mais alors...

- **Question bis** : En est-il de même de l'**ultra-infini** ?

- Donc : l'usage de l'infini donne des moyens supplémentaires pour **démontrer** des propriétés des objets finis (ici : les nombres entiers).

... une **banalité** : toute utilisation des nombres réels
et de l'analyse est une utilisation de l'infini !

- Mais alors...

- **Question bis** : En est-il de même de l'**ultra**-infini ?

« Les spéculations sur l'ultra-infini peuvent-elles mener
à des résultats vraiment concrets ? »

- Une drôle de table de multiplication :

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à **4** éléments

\times	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à **4** éléments

\times	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2				
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à **4** éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à **4** éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne,

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$.

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$.

$$4 \times 2$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1)$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1)$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$.

$$\mathbf{4} \times \mathbf{2} = \mathbf{4} \times (\mathbf{1} \times \mathbf{1}) = (\mathbf{4} \times \mathbf{1}) \times (\mathbf{4} \times \mathbf{1}) = \mathbf{1} \times \mathbf{1}$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times (\mathbf{x} \times \mathbf{z})$.

$$\mathbf{4} \times \mathbf{2} = \mathbf{4} \times (\mathbf{1} \times \mathbf{1}) = (\mathbf{4} \times \mathbf{1}) \times (\mathbf{4} \times \mathbf{1}) = \mathbf{1} \times \mathbf{1} = \mathbf{2},$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1)$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1)$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

×	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

×	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4		
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

×	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2			
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

\times	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à 4 éléments

×	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- **Proposition (Laver)** : La construction marche pour toutes les puissances de 2.

- Une drôle de table de multiplication : la **table de Laver** à **4** éléments

\times	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \pmod 4$ dans la 1ère colonne, compléter en un **LD-système**, *i.e.*, avoir partout $x \times (y \times z) = (x \times y) \times (x \times z)$.

$$4 \times 2 = 4 \times (1 \times 1) = (4 \times 1) \times (4 \times 1) = 1 \times 1 = 2,$$

$$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 1) = (4 \times 2) \times (4 \times 1) = 2 \times 1 = 3,$$

$$4 \times 4 = 4 \times (3 \times 1) = (4 \times 3) \times (4 \times 1) = 3 \times 1 = 4,$$

$$3 \times 2 = 3 \times (1 \times 1) = (3 \times 1) \times (3 \times 1) = 4 \times 4 = 4, \dots$$

- **Proposition (Laver)** : La construction marche pour toutes les puissances de **2**.

↔ la **table de Laver** à **1, 2, 4, 8, 16, 32, ...** éléments.

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément :

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1

1 valeur

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1

1 valeur

- table à 2 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1

1 valeur

- table à 2 éléments : 2, 2

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1

1 valeur

- table à 2 éléments : 2, 2

1 valeur

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments :

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :		

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs

- Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à	32 éléments :		

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs
- table à 256 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs
- table à 256 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ... 8 valeurs

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs
- table à 256 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ... 8 valeurs
- table à 512 éléments :

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs
- table à 256 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ... 8 valeurs
- table à 512 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256,
258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...

• Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément : 1 1 valeur
- table à 2 éléments : 2, 2 1 valeur
- table à 4 éléments : 2, 4, 2, 4 2 valeurs
- table à 8 éléments : 2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8 4 valeurs
- table à 16 éléments : 2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ... 4 valeurs
- table à 32 éléments : 2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ... 8 valeurs
- table à 64 éléments : 2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ... 8 valeurs
- table à 128 éléments : 2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ... 8 valeurs
- table à 256 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ... 8 valeurs
- table à 512 éléments : 2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256,
258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2, ... 16 valeurs

• **Question** : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à	32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à	64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à	128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à	256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à	512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2, ...	16 valeurs



• **Théorème** (R. Laver, 1994).—

• **Question** : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à	32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à	64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à	128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à	256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à	512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2, ...	16 valeurs



- **Théorème** (R. Laver, 1994).—
il existe une table avec plus de 16 valeurs dans la 1ère ligne

• **Question** : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à	32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à	64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à	128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à	256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à	512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2, ...	16 valeurs



- **Théorème** (R. Laver, 1994).—
il existe une table avec plus de 16 valeurs dans la 1ère ligne
(et idem avec un nombre de valeurs aussi grand qu'on veut).

• **Question** : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à n éléments ?

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2, ...	16 valeurs



- **Théorème** (R. Laver, 1994).— S'il existe un ensemble ultra-infini, il existe une table avec plus de 16 valeurs dans la 1ère ligne (et idem avec un nombre de valeurs aussi grand qu'on veut).

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire »)

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système $X...$

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.
- Sait-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.
- Sait-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Non, pas à ce jour.

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.
- Sait-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Non, pas à ce jour.
- **Peut**-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.
- Sait-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Non, pas à ce jour.
- **Peut-on** démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - On ne sait pas, probablement oui (?),

- Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?
 - Un certain axiome de grand cardinal (« il existe un rang auto-similaire ») entraîne l'existence d'un certain (hypothétique) LD-système X ...
...dont les tables de Laver sont des quotients finis.
- Sait-on démontrer l'existence d'un rang auto-similaire et du système X ?
 - Non, et on sait que c'est impossible.
- Sait-on démontrer l'existence des tables de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Oui, c'est facile.
- Sait-on démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - Non, pas à ce jour.
- **Peut-on** démontrer le résultat de Laver sans utiliser d'ultra-infini ?
 - On ne sait pas, probablement oui (?), semble difficile, mais pourquoi pas ?

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver,

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.
- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**,

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.

- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété,

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.
- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété, puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.
- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété, puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.
- Ici : à partir d'une **intuition de logicien** (existence d'ultra-infini),

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.
- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété, puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.
- Ici : à partir d'une **intuition de logicien** (existence d'ultra-infini), **deviner** une propriété (théorème de Laver, existence d'un LD-système ordonné),

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.
- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété, puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.
- Ici : à partir d'une **intuition de logicien** (existence d'ultra-infini), **deviner** une propriété (théorème de Laver, existence d'un LD-système ordonné), puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.

- Dans tous les cas, quelle que soit la suite, c'est l'utilisation de l'(ultra)-infini qui aura permis de **découvrir** le résultat de Laver, et de montrer qu'il est **plausible**.

- En physique : à partir d'une **intuition de physicien**, **deviner** une propriété, puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.

- Ici : à partir d'une **intuition de logicien** (existence d'ultra-infini), **deviner** une propriété (théorème de Laver, existence d'un LD-système ordonné), puis passer au mathématicien pour une « vraie » **démonstration**.

↑
sans ultra-infini

- Résumé :

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.

- **Conclusion** :

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.

- **Conclusion** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini et à l'effectif,

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.
- **Conclusion** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini et à l'effectif, et qu'on ne **croit** pas à l'existence de l'(ultra)-infini,

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.
- **Conclusion** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini et à l'effectif, et qu'on ne **croit** pas à l'existence de l'(ultra)-infini, il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte.

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.

- **Conclusion** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini et à l'effectif, et qu'on ne **croit** pas à l'existence de l'(ultra)-infini, il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte.



- **Question** :

- **Résumé** : Lorsqu'on s'intéresse aux objets finis :
 - Il existe des cas où l'infini n'est ni nécessaire, ni utile ;
 - Il existe des cas où l'infini est **nécessaire** comme moyen de **démonstration**
 - mais, en pratique, ils sont souvent peu concrets ;
 - Il existe des cas où l'infini, et même l'**ultra**-infini, quoique non nécessaire, est **utile** (voire décisif) comme moyen de **découverte**.

- **Conclusion** : Même si on ne s'intéresse qu'au fini et à l'effectif, et qu'on ne **croit** pas à l'existence de l'(ultra)-infini, il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte.



- **Question** : Les Martiens utilisent-ils l'(ultra)-infini ?