



## Combinatoire des tresses et des structures de Garside

Patrick Dehornoy

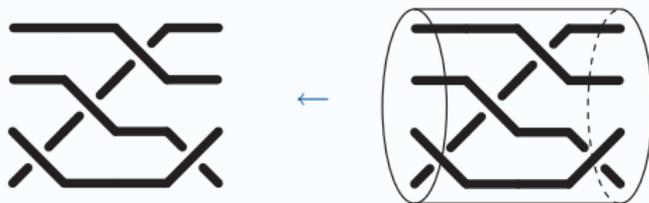
Laboratoire de Mathématiques  
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Quelques questions de combinatoire des tresses :  
intérêt de la structure de Garside, et extensions possibles

- Plan :

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- Un **diagramme de tresse** à 4 brins : = projection 2D de :

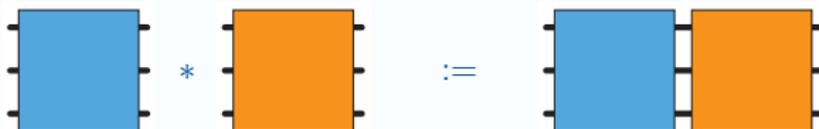


- **Isotopie** = bouger les brins en laissant les bouts fixes :

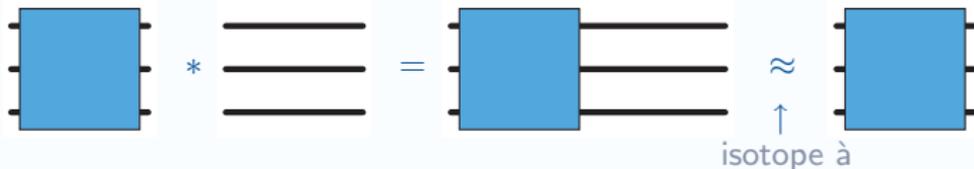


- Une **tresse** := classe d'isotopie  $\rightsquigarrow$  représentée par diagramme, **mais** des diagrammes différents peuvent donner la même tresse.

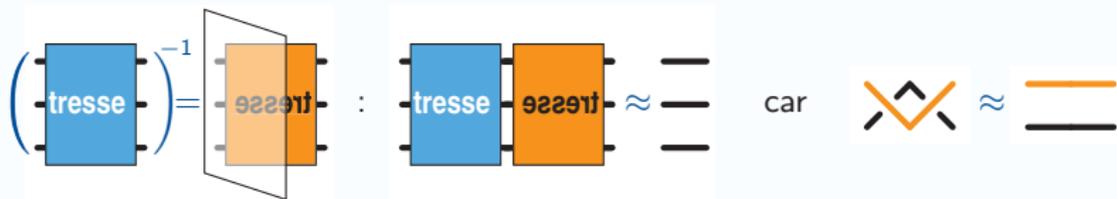
- **Produit** de deux diagrammes de tresses :



- Compatible avec l'isotopie, associatif, admet un élément neutre :

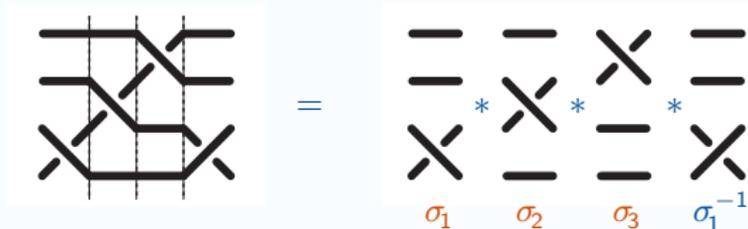


et des inverses :

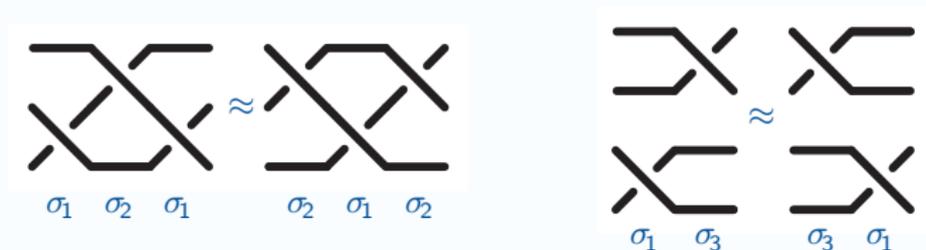


↪ pour chaque  $n$ , un groupe  $B_n$  des tresses à  $n$  brins (E. Artin, 1925).

- Générateurs d'Artin de  $B_n$  :



- Théorème (Artin).**— Le groupe  $B_n$  est engendré par  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , soumis aux relations
 
$$\begin{cases} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j & \text{pour } |i - j| = 1, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$



- Pour  $n \geq 2$ , le groupe  $B_n$  est infini, donc considérer des sous-ensembles **finis**.
- $B_n^+ :=$  monoïde des classes de diagrammes de tresse à  $n$  brins **positifs**  
 tous les croisements dans le sens positif

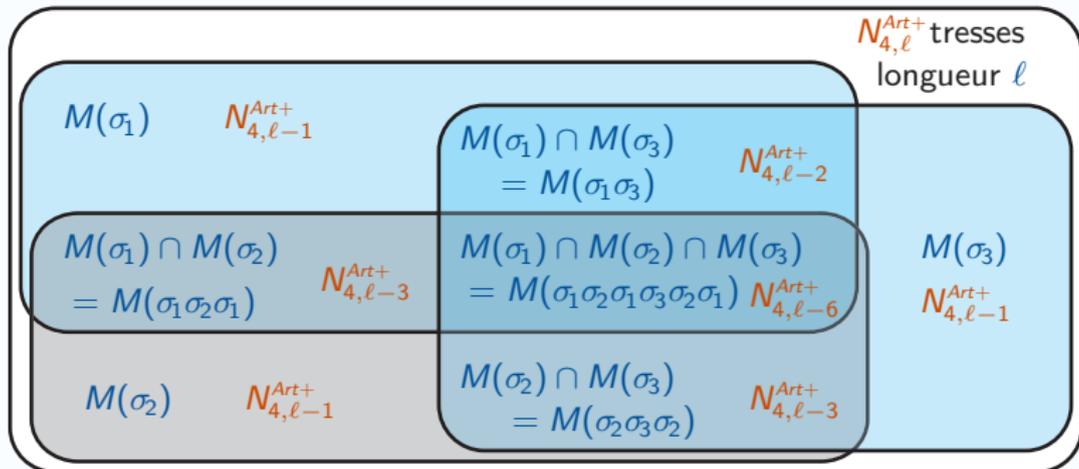
• **Théorème** (Garside, 1967).— Comme monoïde,  $B_n^+$  admet la présentation... ; il est simplifiable, et admet des ppcm et des pgcd.

• Donc : Deux mots de tresse positifs équivalents ont la même longueur, et une tresse positive  $\beta$  a une **longueur** bien définie  $\|\beta\|^{\text{Art}}$  en les générateurs d'Artin  $\sigma_i$ .

• **Question**.— Déterminer  $N_{n,\ell}^{\text{Art}+} := \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{\text{Art}} = \ell\}$   
 et/ou la série génératrice associée.

• **Théorème** (Deligne, 1972).— Pour chaque  $n$ , la série génératrice des  $N_{n,\ell}^{\text{Art}+}$  est rationnelle.

- Existence d'une récurrence  $N_{n,\ell}^{Art+} = c_1 N_{n,\ell-1}^{Art+} + \dots + c_K N_{n,\ell-K}^{Art+}$ .
- Pour  $\beta$  dans  $B_n^+$  :  $M(\beta) :=$  les multiples de  $\beta$  (à droite)  $= \{\beta\gamma \mid \gamma \in B_n^+\}$ .
- Principe 1 : une tresse  $\neq 1$  est multiple d'au moins un  $\sigma_i$ ;
- Principe 2 : une tresse multiple de  $\sigma_i$  et de  $\sigma_j$  est multiple du ppcm de  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$ .



• Donc  $N_{4,\ell}^{Art+} = 3N_{4,\ell-1}^{Art+} - N_{4,\ell-2}^{Art+} - 2N_{4,\ell-3}^{Art+} + N_{4,\ell-6}^{Art+}$ ,  $\rightsquigarrow \frac{1}{1-3t+t^2+2t^3-t^6}$ .



- Donc : pour chaque  $n$ , la série génératrice des  $N_{n,\ell}^{Art+}$  est l'inverse d'un polynôme  $P_n(t)$ .

- **Proposition** (Bronfman, 2001).— Partant de  $P_0(t) = P_1(t) = 1$ , on a

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} t^{\frac{i(i-1)}{2}} P_{n-i}(t).$$

- Exemples :

- $P_2(t) = 1 - t$ ,
- $P_3(t) = 1 - 2t + t^3$ ,
- $P_4(t) = 1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6$ , etc.

- Même question pour  $B_n$  au lieu de  $B_n^+$  ; problème : longueur non unique, par ex. le mot vide (longueur 0) et  $\sigma_1\sigma_1^{-1}$  (longueur 2) représentent la même tresse  
 $\rightsquigarrow$  définir  $\|\beta\|^{Art}$  comme le **minimum** des longueurs des mots représentant  $\beta$ .

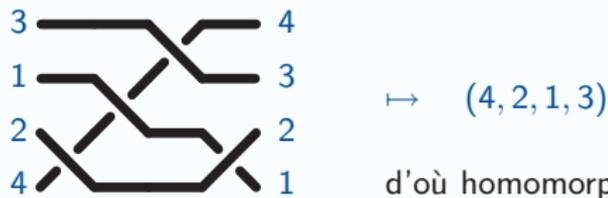
- **Question.**— Déterminer  $N_{n,\ell}^{Art} := \#\{\beta \in B_n \mid \|\beta\|^{Art} = \ell\}$   
 et/ou déterminer la série génératrice associée.

- **Proposition** (Mairesse–Matheus, 2005).— La série génératrice des nombres  $N_{3,\ell}^{Art}$  est  $1 + \frac{2t(2 - 2t - t^2)}{(1 - t)(1 - 2t)(1 - t - t^2)}$ .

- Ouvert, même  $N_{4,\ell}^{Art}$  : (Mairesse) pas de dénominateur de degré  $\leq 13$ ...
- "Explication" : les générateurs d'Artin ne sont pas les **bons** générateurs...  
 $\rightsquigarrow$  changer de générateurs

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

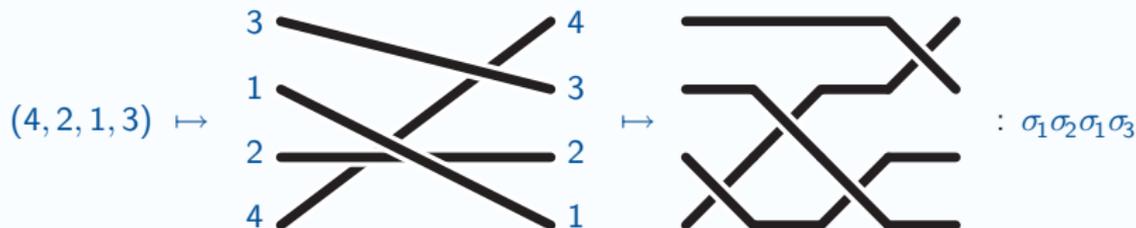
- **Permutation** associée à une tresse :



d'où homomorphisme surjectif  $\pi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$

- **Définition.**— Une tresse est **simple** si elle peut être représentée par un diagramme positif où deux brins quelconques se coupent au plus une fois.

- **Lemme.**— Pour tout  $f$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , il existe **une** tresse simple  $\sigma_f$  vérifiant  $\pi(\sigma_f)=f$ .



- Remarque :  $\sigma_i = \sigma_{(i,i+1)}$ , donc les  $\sigma_f$  engendrent  $B_n$  : "générateurs de Garside"

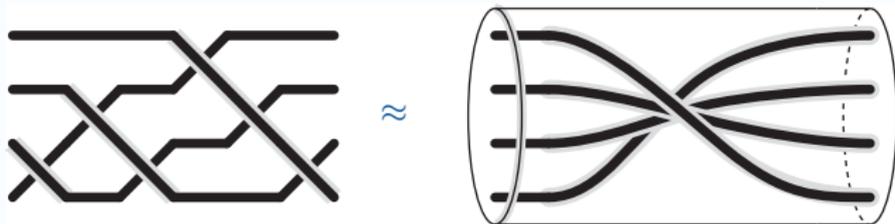
• **Proposition.**— En termes des générateurs de Garside, le groupe  $B_n$  (et le monoïde  $B_n^+$ ) sont présentés par les relations  $\sigma_f \sigma_g = \sigma_{fg}$  avec  $\ell(f) + \ell(g) = \ell(fg)$ .

↑  
# inversions de  $f$

- **Question.**— Déterminer  $N_{n,\ell}^{Gar+} := \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{Gar} = \ell\}$   
et/ou déterminer la série génératrice.

- La famille des générateurs  $\sigma_f$  est très redondante
  - ↪ en général beaucoup d'expressions équivalentes pour une tresse
  - ↪ mais existence d'une expression distinguée : "forme normale"

- La tresse **fondamentale** :  $\Delta_n := \sigma_{(n, \dots, 1)}$  ;  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$ .



- Notation :  $\alpha \preceq \beta$ , " $\alpha$  **divise** (à gauche)  $\beta$  s'il existe  $\gamma$  positive t.q.  $\alpha\gamma = \beta$   
(alias :  $\beta$  multiple de  $\alpha$ )

• **Proposition** (Garside 1967).—  $(B_n^+, \preceq)$  est un treillis : deux tresses positives admettent un pgcd et un ppcm.

- Forme normale d'une tresse positive :
  - Si  $\beta = 1$ , alors on pose  $\text{NF}(\beta) := \varepsilon$  (mot vide) ;
  - Sinon,  $\beta_1 := \text{pgcd}(\beta, \Delta_n)$ , plus grande tresse simple divisant  $\beta$  ; il existe  $\beta'$  t.q.  $\beta = \beta_1 \beta'$ , on recommence avec  $\beta'$  et on pose  $\text{NF}(\beta) = (\beta_1)^{\frown} \text{NF}(\beta')$ .

• **Proposition** (ElRifai-Morton, Thurston, Adyan, ...1980's) Toute tresse positive admet une unique décomposition  $(\beta_1, \dots, \beta_\ell)$  t.q.  $\beta_k$  est la plus grande tresse simple divisant  $\beta_k \dots \beta_\ell$  pour tout  $k$ .

↪ la forme normale "greedy"

- Démonstration :  $\beta \neq 1 \Rightarrow \text{pgcd}(\beta, \Delta_n) \neq 1$ , d'où  $\|\beta'\| < \|\beta\|$ , et converge.  $\square$
- Forme normale d'une tresse quelconque :

• **Proposition** (Garside, 1967) Toute tresse de  $B_n$  admet une unique expression  $\beta_1^{-1} \beta_2$  avec  $\beta_1, \beta_2$  dans  $B_n^+$  vérifiant  $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) = 1$ .

↪ la forme normale symétrique "greedy"

- Par l'existence de la forme normale

$N_{n,\ell}^{Gar+}$  ( $= \#\{\beta \in B_n^+ \mid \|\beta\|^{Gar} = \ell\}$ ) = # de suites normales  $(s_1, \dots, s_\ell)$  dans  $B_n^+$ ;

- (Contrairement aux générateurs d'Artin), question facile  
car la normalité est une propriété locale :

- **Lemme.**— Une suite de tresses simples  $(s_1, \dots, s_\ell)$  est normale ssi chaque sous-suite de longueur 2 l'est.

- **Proposition.**— Soit  $M_n$  la matrice  $n! \times n!$  indexée par les tresses simples (i.e., les permutations) t.q.  $(M_n)_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{si } (s, t) \text{ est normal,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors  $N_{n,\ell}^{Gar+}(s)$  est la première valeur dans  $(1, \dots, 1) \cdot M_n^\ell$ .

$\rightsquigarrow$  Pour chaque  $n$ , la série génératrice des  $N_{n,\ell}^{Gar+}$  est rationnelle.

- Exemples:

$$M_1 = (1), \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

- D'où:  $N_{3,\ell}^{\text{Gar}+} = 8 \cdot 2^\ell - 3\ell - 7$ , etc.

- Cas des tresses quelconques : local et géodésique

• **Lemme.**— Si  $(s_1, \dots, s_p)$  et  $(t_1, \dots, t_q)$  sont des suites normales, alors  $\text{pgcd}(s_1 \dots s_p, t_1 \dots t_q) = 1$  si et seulement si  $\text{pgcd}(s_1, t_1) = 1$  ; la forme normale symétrique est géodésique.

• **Proposition.**—  $N_{n,\ell}^{\mathcal{G}} = \sum_{p+q=\ell} \#\{(\vec{s}, \vec{t}) \mid \vec{s}, \vec{t} \text{ normales lg } p, q \text{ et } \text{pgcd}(s_1, t_1) = 1\}$ .

- La "vraie" application (Cannon, Thurston).— La forme normale définit une structure de groupe automatique sur  $B_n$ .

- Retour à  $B_n^+$  ; rappel : tresse simple dans  $B_n^+ \approx$  permutation de  $\{1, \dots, n\}$

- **Lemme.**—  $(\sigma_f, \sigma_g)$  normal ssi  $D(f) \supseteq D(g^{-1})$ .

$\uparrow$   
 descentes de  $f := \{k \mid f(k) > f(k+1)\}$

- Donc :  $(M_n)_{f,g} = 1$  iff  $D(f) \supseteq D(g^{-1})$ .  
 $\rightsquigarrow$  Si  $D(g^{-1}) = D(g'^{-1})$ , les colonnes de  $g$  et  $g'$  dans  $M_n$  sont égales  
 $\rightsquigarrow$  On peut regrouper les colonnes : réduit la taille de  $n!$  à  $2^{n-1}$  :

- **Proposition.**— Soit  $(M'_n)_{I,J} := \#$  de  $f$  dans  $\mathfrak{S}_n$  t.q.  $D(f) = I$  et  $D(f^{-1}) \supseteq J$ . Alors  $N_{n,\ell}^{Gar+}$  est la première valeur dans  $(1, \dots, 1) \cdot M'_n{}^\ell$ .

- Exemple:  $M'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ( $\rightsquigarrow$  taille 4 au lieu de 6)

- **Lemme.**— Le  $\#$  de permutations  $f$  vérifiant  $D(f) \supseteq I$  et  $D(f^{-1}) \supseteq J$  est le  $\#$  de  $k \times \ell$  matrices à coefficients dans  $\mathbb{N}$  t.q. la somme de la  $i$ ème ligne est  $p_i$  et la somme de la  $j$ ème colonne est  $q_j$ , où  $(p_1, \dots, p_k)$  est la **composition** de  $I$  et  $(q_1, \dots, q_\ell)$  est celle de  $J$ .

↑  
suite formée par les tailles des blocs d'éléments adjacents

ensemble formé par les tailles des blocs d'éléments adjacents

↓  
 $\rightsquigarrow (M'_n)_{I,J}$  ne dépend que de la **partition** de  $J$   $\rightsquigarrow$  re-regrouper les colonnes :

- **Prop.**— Soit  $M''_n$  la matrice  $p(n) \times p(n)$  t.q.  $(M''_n)_{\lambda,\mu} := \sum_{\text{part}(I)=\lambda} (M'_n)_{I,\mu}$ . Alors  $N_{n,\ell}^{\text{Gar}+}$  est le premier terme de  $(1, \dots, 1) \cdot M''_n{}^\ell$ .

- Aller de  $M_n$  à  $M''_n \approx$  réduire la taille de la structure automatique de  $B_n$   
de  $n!$  à  $p(n)$  ( $\sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$ )

- (**Hohlweg**) Le fait que  $(M'_n)_{I,J}$  ne dépend que de la partition de  $J$  est une (autre) forme du résultat de **Solomon** sur l'algèbre des descentes.

- Quand  $n$  croît,  $N_{n,\ell}^{Gar+}$  lié aux valeurs propres de  $M_n$ , donc de  $M_n''$  :

$$M_3'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1, 1, 2 ; \quad M_4'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1, 1, 2, 3 \pm \sqrt{6}.$$

- Comparer les polynômes caractéristiques :

$$\begin{aligned} \text{CharPol}(M_1'') &= x - 1 \\ \text{CharPol}(M_2'') &= \text{CharPol}(M_1'') \cdot (x - 1) \\ \text{CharPol}(M_3'') &= \text{CharPol}(M_2'') \cdot (x - 2) \\ \text{CharPol}(M_4'') &= \text{CharPol}(M_3'') \cdot (x^2 - 6x + 3) \\ \text{CharPol}(M_5'') &= \text{CharPol}(M_4'') \cdot (x^2 - 20x + 24) \\ \text{CharPol}(M_6'') &= \text{CharPol}(M_5'') \cdot (x^4 - 82x^3 + 359x^2 - 260x + 60) \dots \end{aligned}$$

- **Proposition** (Hivert–Novelli–Thibon).—

Le polynôme caractéristique de  $M_n''$  divise celui de  $M_{n+1}''$ .

- **Démonstration.**— Interpréter  $M_n''$  en termes de fonctions quasi-symétriques au sens de Malvenuto–Reutenauer, et déterminer la décomposition LU. □

- Quelques expériences supplémentaires :

$n$	2	3	4	5	6	7	8
$\lambda_{\max}(M_n)$	1	2	5.5	18.7	77.4	373.9	2066.6
$\frac{\lambda_{\max}(M_n)}{n \cdot \lambda_{\max}(M_{n-1})}$	0.5	0.667	0.681	0.687	0.689	0.690	0.691

- **Question.**— Quel est le comportement asymptotique de  $\lambda_{\max}(M_n)$  ?

- **Conclusion.**— La **combinatoire des tresses** par rapport aux générateurs de Garside mène à des questions nouvelles et intéressantes sur la **combinatoire des permutations**.

- Jusqu'à présent, on a étudié  $N_{n,\ell}^{Gar+}$  à  $n$  fixé ; pour  $\ell$  fixé, récurrences (très) diverses ; d'abord  $N_{n,1}^{Gar+} = n!$

- **Proposition.** —  $N_{n,2}^{Gar+} = \sum_0^{n-1} (-1)^{n+i+1} \binom{n}{i}^2 N_{i,2}^{Gar+}$ ,

d'où (Carlitz–Scoville–Vaughan)  $1 + \sum_n N_{n,2}^{Gar+} \frac{z^n}{(n!)^2} = \frac{1}{J_0(\sqrt{z})}$ .

$J_0$  fonction de Bessel

- Ensuite, en posant  $N_{n,\ell}^{Gar+}(s) = \#$  de suites normales  $(s_1, \dots, s_{\ell-1}, s)$  dans  $B_n^+$ ,  
 $N_{n,3}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = 2^{n-1}$ ,  $N_{n,3}^{Gar+}(\Delta_{n-2}) = 2 \cdot 3^n - (n+6) \cdot 2^{n-1} + 1$ , ...
- Puis  $N_{n,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = nN_{n-1,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) + 2n - 1$ , d'où  $N_{n,4}^{Gar+}(\Delta_{n-1}) = \lfloor n!e \rfloor - 1$ ...

1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- A ce point : riche combinatoire des tresses, liée au choix d'une **bonne** famille de générateurs, en l'occurrence les générateurs de Garside

↪ A-t-on des propriétés analogues pour d'autres groupes ?

• **Définition** (D.–Paris, 1999).— Un monoïde  $M$  est dit **de Garside** relativement à un élément  $\Delta$  si  $M$  est simplifiable, possède une présentation homogène (relations préservant la longueur), admet des pgcd et ppcm, et  $\Delta$  est tel que ses diviseurs à gauche et à droite coïncident, sont en nombre fini, et engendrent  $M$ .

Un **groupe de Garside** est un groupe de fractions d'un monoïde de Garside.

• **Proposition**.— Si  $M$  est un monoïde de Garside relativement à  $\Delta$ , tout élément de  $M$  a une unique décomposition  $(s_1, \dots, s_\ell)$  avec  $s_1, \dots, s_\ell$  simples (= divisant  $\Delta$ ) et t.q.  $s_k$  est diviseur simple maximal de  $s_k \dots s_\ell$  pour tout  $k$ .

- Pour chaque monoïde de Garside : une structure (bi)-automatique sur le groupe, et une matrice d'adjacence pour la combinatoire de la forme normale.

- Exemple numéro 0 :  $B_n^+$  est monoïde de Garside relativement à  $\Delta_n$
- D'autres générateurs de  $B_n$  :

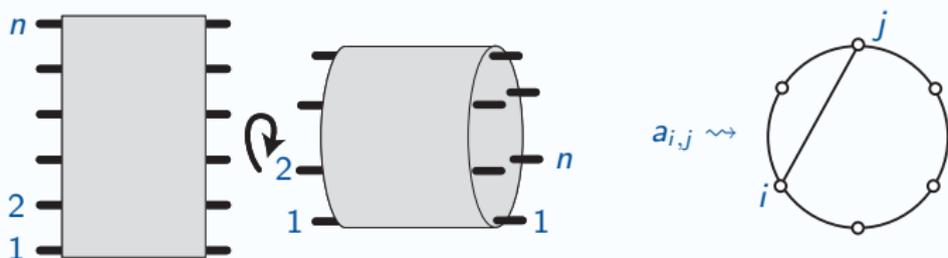
$$a_{i,j} = \sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n.$$



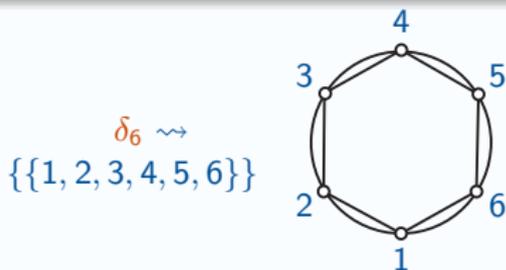
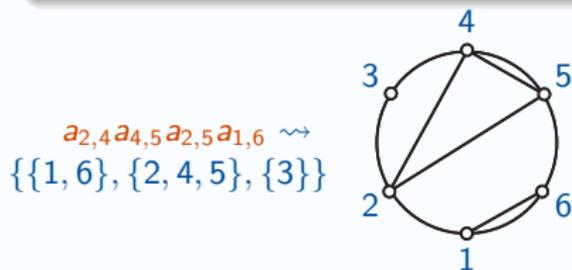
- Monoïde de tresses **dual** : le sous-monoïde  $B_n^{+*}$  de  $B_n$  engendré par les  $a_{i,j}$ .

• **Proposition** (Birman–Ko–Lee, 1997).— Le monoïde  $B_n^{+*}$  est un monoïde de Garside relativement à  $\delta_n = \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$ .

- Représentation "cylindrique" des générateurs  $a_{i,j}$  :



- **Proposition.**— Les diviseurs de  $\delta_n$  dans  $B_n^{+*}$  sont en bijection avec les  $Cat(n)$  partitions non croisées de  $\{1, \dots, n\}$ .



$\rightsquigarrow$  Calculer  $N_{n,\ell}^{BKL+}$ , étudier les matrices d'adjacence, les valeurs propres, etc.

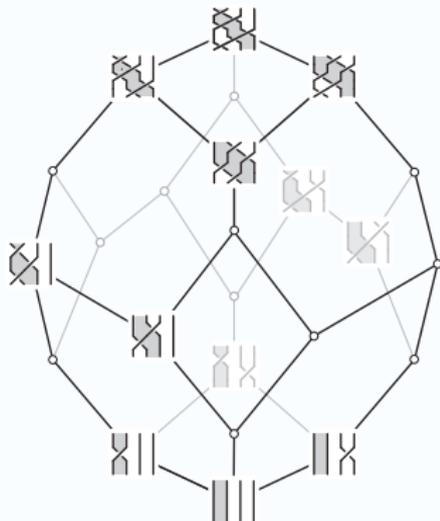
- Il existe bien d'autres groupes de Garside, avec chacun leur combinatoire, par exemple, tous les groupes de la forme  $\langle a, b, c, \dots \mid a^p = b^q = c^r = \dots \rangle$ .
- Mais surtout : le **mécanisme** de la forme normale "greedy" fonctionne au-delà des groupes et monoïdes de Garside.

• **Définition.**— Une sous-famille  $\mathcal{S}$  d'une catégorie  $\mathcal{C}$  (simplifiable à gauche) est une **famille de Garside** si tout élément de  $\mathcal{C}$  a une décomposition  $\mathcal{S}$ -normale, où un chemin  $(s_1, \dots, s_\ell)$  est déclaré  **$\mathcal{S}$ -normal** si  $s_1, \dots, s_\ell$  sont dans  $\mathcal{S}$  et

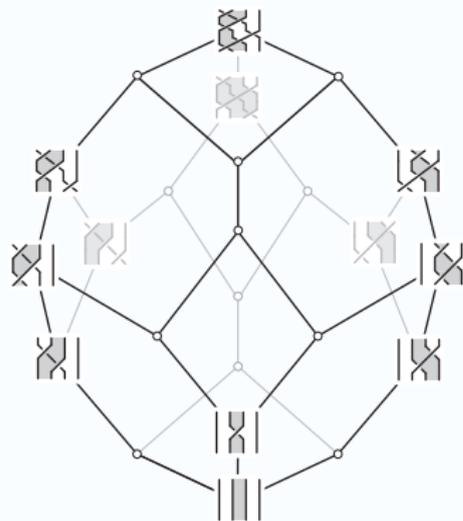
$$\forall k \forall s \in \mathcal{S} \forall f \in \mathcal{C} (s \preccurlyeq fs_k s_{k+1} \Rightarrow s \preccurlyeq fs_k).$$

- Exemple numéro 0 : si  $M$  est un monoïde de Garside relativement à  $\Delta$ , alors  $\text{Div}(\Delta)$  est une famille de Garside dans  $M$ .

- Exemple de famille de Garside dans une catégorie qui n'est pas un monoïde :  
les tresses simples dans la catégorie des rubans de  $B_4$



tresses simples avec un (1,2)-ruban



tresses simples avec un (2,3)-ruban

- Question.**— Pourquoi 12 éléments ? Pourquoi des treillis isomorphes ?

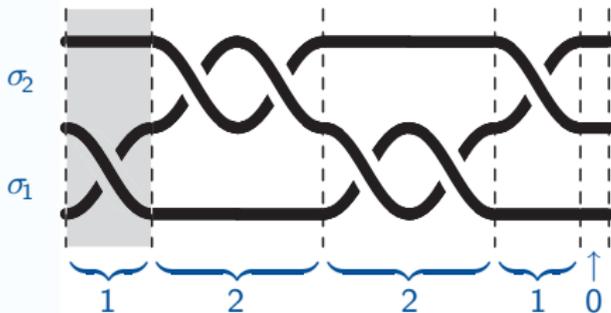
1. Combinatoire des tresses : générateurs d'Artin
2. Combinatoire des tresses : générateurs de Garside
3. D'autres structures de Garside
4. Une application bizarre

- But : construire de (très) longues suites finies de tresses dans  $B_3^+$  par une récurrence simple (cf. suites de Goodstein et bataille contre l'Hydre).

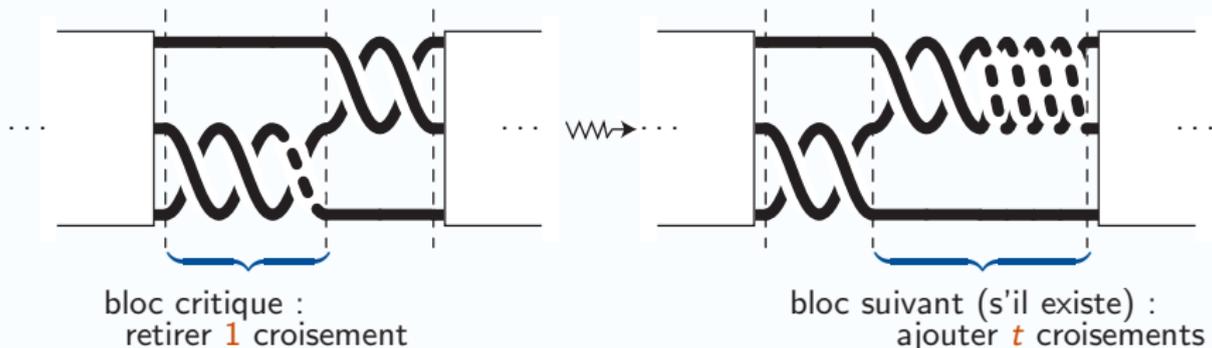
- **Lemme (Burckel).**— Toute tresse de  $B_3^+$  admet une unique expression  $\sigma_{[p]}^{e_p} \dots \sigma_2^{e_2} \sigma_1^{e_1}$  avec  $e_p \geq 1$ ,  $e_{p-1} \geq 2$ , ...,  $e_3 \geq 2$ ,  $e_2 \geq 1$ ,  $e_1 \geq 0$ .

↑  
1 ou 2 suivant la parité de  $p$

- Position **critique** : plus petit  $k$  (= le bloc le plus à droite) t.q.  $e_k$  n'a pas la valeur légale minimale, s'il existe, et  $p$  sinon.



- **Définition.**— Partant de  $\beta_0$  dans  $B_3^+$ , et tant que  $\beta_t \neq 1$ , définir  $\beta_{t+1}$  :
  - retirer un croisement dans le bloc critique de  $\beta_t$  ;
  - si le bloc critique n'est pas le dernier bloc, ajouter  $t$  nouveaux croisements dans le bloc suivant le bloc critique.



- Exemples :
  - $\sigma_2^2 \sigma_1^2, \sigma_2^2 \sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_2 \sigma_1^3, \sigma_2 \sigma_1^2, \sigma_2 \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^7, \sigma_1^6, \sigma_1^5, \sigma_1^4, \sigma_1^3, \sigma_1^2, \sigma_1, 1$  ;
  - $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1, \dots, 1$  (30 étapes) ;
  - $\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_1^2, \dots, 1$  (90 159 953 477 630 étapes).

• **Proposition 1.**— Pour toute  $\beta_0$  dans  $B_3^+$  (resp.  $B_\infty^+$ ), la suite  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  est finie.

• **Démonstration.**— Il existe un bon ordre sur  $B_\infty^+$  telle que la suite  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  est strictement décroissante.  $\square$

le sous-système de l'arithmétique de Peano avec induction restreinte aux formules avec un quantificateur  $\exists$  (resp.  $\exists\forall$ ) non borné



• **Théorème.**— La proposition 1 n'est **pas** prouvable dans le système  $I\Sigma_1$  (resp.  $I\Sigma_2$ ).

• **Démonstration.**— On a  $T(\sigma_{[p]} \sigma_{[p-1]}^2 \dots \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_1^p) \geq \text{Ack}(p)$ . Or  $I\Sigma_1$  ne prouve pas l'existence de la fonction d'Ackermann. Donc il ne peut prouver la finitude des suites  $(\beta_t)_{t \geq 0}$ . Idem pour  $B_\infty^+$  avec fonction de Hardy  $H_{\omega^\omega}$ .  $\square$

par contraste avec le résultat informel :

• Toutes les propriétés (algébriques) usuelles des tresses sont prouvables dans  $I\Sigma_1$ .

- Jusqu'à présent, suites particulières de tresses positives ; maintenant, suites **quelconques**, mais toujours strictement décroissantes pour le bon ordre.
- Fait : Pour tout  $\ell$ , il existe  $m$  t.q. toute suite  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  strictement décroissante dans  $B_3^+$  et satisfaisant  $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell$  pour tout  $t$  a une longueur au plus  $m$ .  
(évident :  $\#$  fini de tresses satisfaisant  $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell$ )

• **Definition.**— Pour  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , soit  $WO_f$  le principe :  
" Pour tout  $\ell$ , il existe  $m$  t.q. toute suite  $(\beta_t)_{t \geq 0}$  strictement décroissante dans  $B_3^+$  et satisfaisant  $\|\beta\|^{Gar} \leq \ell + f(t)$  pour tout  $t$  a une longueur au plus  $m$ ".

- Le fait dit que  $WO_{constant}$  est vrai.

• **Proposition.**— Pour toute fonction  $f$ , le principe  $WO_f$  est vrai.

Démonstration : Construire un arbre de suites finies ordonné par inclusion ; cet arbre est à branchement fini car  $\#$  fini de tresses de longueur donnée ; si  $m$  n'existait pas, l'arbre aurait une branche infinie, contredisant le bon ordre.  $\square$

- $WO_{\text{constante}}$  est prouvable dans  $I\Sigma_1$  (argument de comptage valide);
- $WO_{\text{carré}}$  n'est pas prouvable dans  $I\Sigma_1$  (analyse des suites "hydres").

• **Question.**— Où est la transition  $I\Sigma_1$ -prouvable /  $I\Sigma_1$ -improuvable ?

- **Notation.**—  $Ack_\omega$  fonction d'Ackermann ;  $Ack_r$  pour le  $r$ -ième niveau de la hiérarchie d'Ackermann ;  $Ack_r^{-1}$  pour l'inverse fonctionnel de  $Ack_r$  :

$Ack_r^{-1}(n) = p$  ssi  $Ack_r(p) \leq n < Ack_r(p+1)$  (croissant très lentement)

- **Théorème.**— Pour  $r \leq \omega$ , soit  $f_r(x) := \lfloor Ack_r^{-1}(\sqrt[x]{x}) \rfloor$ . Alors  $WO_{f_r}$  est prouvable à partir de  $I\Sigma_1$  pour  $r$  fini, et non prouvable à partir de  $I\Sigma_1$  pour  $r = \omega$ .

- **Démonstration.**— Evaluer  $\#\{\beta \in B_3^+ \mid \|\beta\|^{Gar} \leq \ell \ \& \ \beta < \Delta_3^k\}$  :

exactement ce qu'on a fait plus haut...  $\square$

- Dès qu'il y a une [famille de Garside finie](#), il y a un automate fini, donc une matrice d'adjacence, etc. et toute une combinatoire.
- Celle-ci a des chances d'être intéressante quand la famille de Garside est reliée à des objets eux-mêmes intéressants : permutations (monoïdes de tresses), partitions non croisées (monoïdes de tresses duaux), etc.
- La famille des catégories possédant une famille de Garside (finie) intéressante est ([apparemment](#)) vaste et mal connue ; exemple ([Bessis, 2006](#)) : les groupes libres sont des groupes de Garside.
- Tout ce qu'on a dit pour les tresses s'étend aux groupes d'Artin de type sphérique (i.e., associés à un groupe de Coxeter fini).
- Il existe des structures de Garside exotiques sur les groupes de tresses et, au-delà, des formes normales non basées sur une structure de Garside :  
(très) nombreux problèmes de dénombrement potentiels.

- [J. Mairesse & F. Matheus](#), Growth series for Artin groups of dihedral type  
Internat. J. Algebra Comput. 16 (2006) 1087–1107
- [P. Dehornoy](#), Combinatorics of normal sequences of braids,  
J. Combinatorial Th. Series A, 114 (2007) 389–409.
- [F. Hivert](#), [J.-C. Novelli](#), [J.-Y. Thibon](#), Sur une conjecture de Dehornoy  
Comptes Rendus Math. 346 (2008) 375–378.
- [P. Dehornoy & L. Paris](#), Gaussian groups and Garside groups, two  
generalizations of Artin groups; Proc. London Math. Soc., 79 (1999) 569–604.
- [P. Dehornoy](#), [E. Godelle](#), [F. Digne](#), & [J. Michel](#), Garside calculus,  
[www.math.unicaen.fr/~garside/](http://www.math.unicaen.fr/~garside/)
- [L. Carlucci](#), [P. Dehornoy](#), [A. Weiermann](#), Unprovability statements involving  
braids; Proc. London Math. Soc., 102 (2011) 159–192.
- [D. Bessis](#), A dual braid monoid for the free group,  
Journal of Algebra 302 (2006) 55–69.