Patrick Dehornoy

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

Il était une fois la théorie des ensembles...

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « maths modernes » :

Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « maths modernes » : ce qu'est — et n'est pas — la théorie des ensembles.

Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « maths modernes » : ce qu'est — et n'est pas — la théorie des ensembles.
- Une promenade de 140 ans en compagnie de grands génies des mathématiques...

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. Et aujourd'hui ?

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. Et aujourd'hui ?

André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**

André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

  « *moderniser l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, au collège et au lycée, en insistant sur les structures mathématiques* »

André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

  « *moderniser l'enseignement des mathématiques*
  à l'école primaire, au collège et au lycée,
  en insistant sur les structures mathématiques »

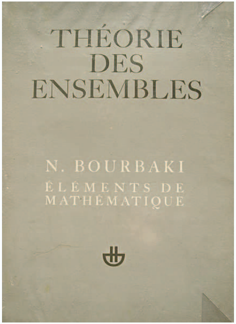
- **Fondée sur la théorie des ensembles,**

André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

  « *moderniser l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, au collège et au lycée, en insistant sur les structures mathématiques* »

- **Fondée sur la théorie des ensembles, et le traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki**



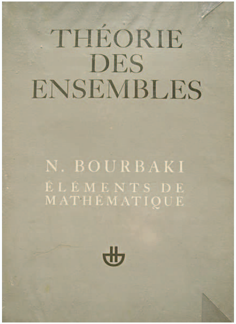
André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

  « *moderniser l'enseignement des mathématiques*
  à l'école primaire, au collège et au lycée,
  en insistant sur les structures mathématiques »

- **Fondée sur la théorie des ensembles,**
  et le traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki

le groupe Bourbaki



- **La réforme :**

• **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie...**

• **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des ensembles et des relations !**

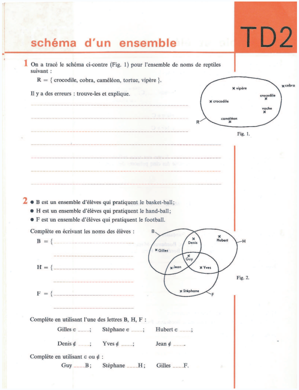


schéma d'un ensemble

TD2

1 On a tracé le schéma ci-contre (Fig. 1) pour l'ensemble de noms de reptiles suivant :

R = { crocodile, cobra, caméléon, tortue, vipère }.

Il y a des erreurs : trouve-les et explique.

Fig. 1.

2 • B est un ensemble d'élèves qui pratiquent le basket-ball;
• H est un ensemble d'élèves qui pratiquent le hand-ball;
• F est un ensemble d'élèves qui pratiquent le football.

Complète en écrivant les noms des élèves :

B = { ______

H = { ______

F = { ______

Fig. 2.

Complète en utilisant l'une des lettres B, H, F :

Gilles ∈ ____; Stéphane ∈ ____; Hubert ∈ ____;

Denis ∉ ____; Yves ∉ ____; Jean ∉ ____.

Complète en utilisant ∈ ou ∉ :

Guy ____ B; Stéphane ____ H; Gilles ____ F.

• **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des ensembles et des relations !**

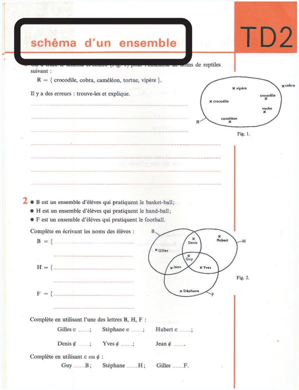


schéma d'un ensemble

TD2

[illegible] noms de reptiles suivant :

R = { crocodile, cobra, caméléon, tortue, vipère }.

Il y a des erreurs : trouve-les et explique.

Fig. 1.

2 • B est un ensemble d'élèves qui pratiquent le basket-ball;
• H est un ensemble d'élèves qui pratiquent le hand-ball;
• F est un ensemble d'élèves qui pratiquent le football.

Complète en écrivant les noms des élèves :

B = { ____

H = { ____

F = { ____

Fig. 2.

Complète en utilisant l'une des lettres B, H, F :

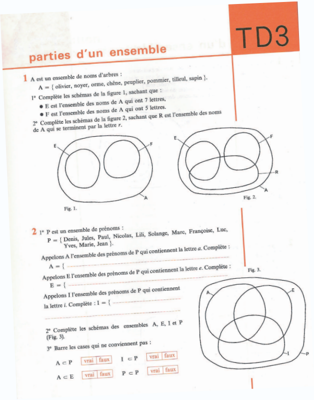
Gilles ∈ ____; Stéphane ∈ ____; Hubert ∈ ____;

Denis ∉ ____; Yves ∉ ____; Jean ∉ ____.

Complète en utilisant ∈ ou ∉ :

Guy ____ B; Stéphane ____ H; Gilles ____ F.

- **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des ensembles et des relations !**



TD3

parties d'un ensemble

1 A est un ensemble de noms d'arbres :

A = { olivier, noyer, orme, chêne, peuplier, pommier, tilleul, sapin }.

1° Complète les schémas de la figure 1, sachant que :

- E est l'ensemble des noms de A qui ont 7 lettres,
- F est l'ensemble des noms de A qui ont 5 lettres.

2° Complète les schémas de la figure 2, sachant que R est l'ensemble des noms de A qui se terminent par la lettre *r*.

Fig. 1.

Fig. 2.

2 1° P est un ensemble de prénoms :

P = { Denis, Jules, Paul, Nicolas, Lili, Solange, Marc, Françoise, Luc, Yves, Marie, Jean }.

Appelons A l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *a*. Complète :

A = {

Appelons E l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *e*. Complète :

E = {

Appelons I l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *i*. Complète : I = {

2° Complète les schémas des ensembles A, E, I et P (Fig. 3).

3° Barre les cases qui ne conviennent pas :

$A \subset P$	vrai / faux	$I \subset P$	vrai / faux
$A \subset E$	vrai / faux	$P \subset P$	vrai / faux

Fig. 3.

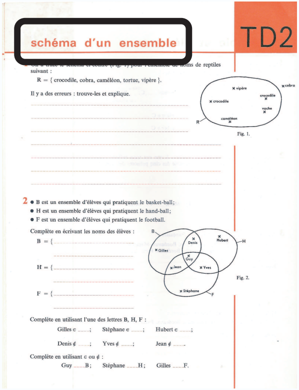


schéma d'un ensemble

TD2

1 On a tracé le schéma ci-contre (Fig. 1) pour l'ensemble de noms de reptiles suivant :

R = { crocodile, cobra, caméléon, tortue, vipère }.

Il y a des erreurs : trouve-les et explique.

Fig. 1.

2
- B est un ensemble d'élèves qui pratiquent le basket-ball;
- H est un ensemble d'élèves qui pratiquent le hand-ball;
- F est un ensemble d'élèves qui pratiquent le football.

Complète en écrivant les noms des élèves :

B = {

H = {

F = {

Fig. 2.

Complète en utilisant l'une des lettres B, H, F :

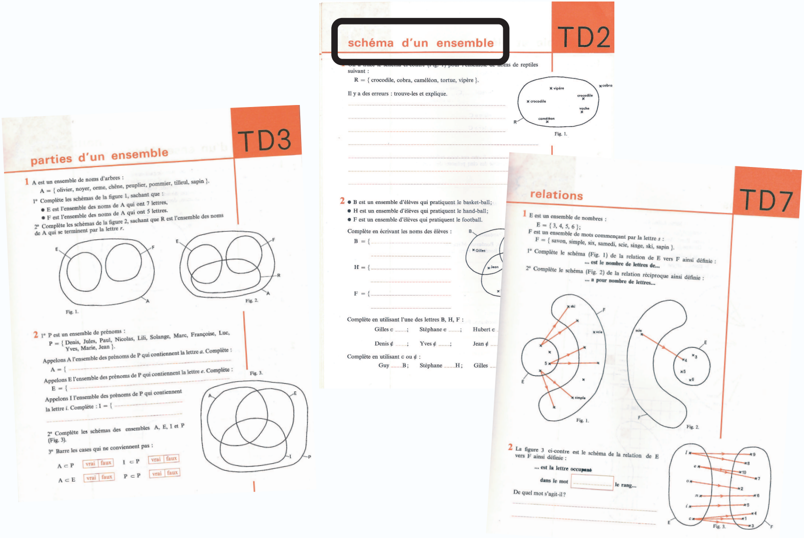
Gilles $\in$ ____; Stéphane $\in$ ____; Hubert $\in$ ____;

Denis $\notin$ ____; Yves $\notin$ ____; Jean $\notin$ ____.

Complète en utilisant $\in$ ou $\notin$:

Guy ____ B; Stéphane ____ H; Gilles ____ F.

• **La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des ensembles et des relations !**



TD3

parties d'un ensemble

1 A est un ensemble de noms d'arbres :

A = { olivier, noyer, orme, chêne, peuplier, pommier, tilleul, sapin }.

1° Complète les schémas de la figure 1, sachant que :

- E est l'ensemble des noms de A qui ont 7 lettres,
- F est l'ensemble des noms de A qui ont 5 lettres.

2° Complète les schémas de la figure 2, sachant que R est l'ensemble des noms de A qui se terminent par la lettre *r*.

Fig. 1.

Fig. 2.

2 1° P est un ensemble de prénoms :

P = { Denis, Jules, Paul, Nicolas, Lili, Solange, Marc, Françoise, Luc, Yves, Marie, Jean }.

Appelons A l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *a*. Complète :

A = {

Appelons E l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *e*. Complète :

E = {

Appelons I l'ensemble des prénoms de P qui contiennent la lettre *i*. Complète : I = {

2° Complète les schémas des ensembles A, E, I et P (Fig. 3).

3° Barre les cases qui ne conviennent pas :

A ⊂ P vrai faux I ⊂ P vrai faux

A ⊂ E vrai faux P ⊂ P vrai faux

Fig. 3.

TD2

schéma d'un ensemble

suivant :

R = { crocodile, cobra, caméléon, tortue, vipère }.

Il y a des erreurs : trouve-les et explique.

Fig. 1.

2
- B est un ensemble d'élèves qui pratiquent le basket-ball;
- H est un ensemble d'élèves qui pratiquent le hand-ball;
- F est un ensemble d'élèves qui pratiquent le football.

Complète en écrivant les noms des élèves :

B = {

H = {

F = {

Complète en utilisant l'une des lettres B, H, F :

Gilles ∈ ___ ; Stéphane ∈ ___ ; Hubert ∈

Denis ∉ ___ ; Yves ∉ ___ ; Jean ∉

Complète en utilisant ∈ ou ∉ :

Guy ___ B ; Stéphane ___ H ; Gilles

TD7

relations

1 E est un ensemble de nombres :

E = { 3, 4, 5, 6 };

F est un ensemble de mots commençant par la lettre *s* :

F = { savon, simple, six, samedi, scie, singe, ski, sapin }.

1° Complète le schéma (Fig. 1) de la relation de E vers F ainsi définie :

... est le nombre de lettres de...

2° Complète le schéma (Fig. 2) de la relation réciproque ainsi définie :

... a pour nombre de lettres...

Fig. 1.

Fig. 2.

2 La figure 3 ci-contre est le schéma de la relation de E vers F ainsi définie :

... est la lettre occupant dans le mot ______ **le rang...**

De quel mot s'agit-il ?

Fig. 3.

- **Personne ne savait où tout cela menait, et cela donnait de drôles de résultats...**

- **Personne ne savait où tout cela menait, et cela donnait de drôles de résultats...**

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner 1, additionner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bâton de craie rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie verte. On dit qu'il a dans la main un **ensemble** de bâtons de craie.
— Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont placés dans une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, sur le bureau entourés d'une ficelle ? (oui).
— Chacun des bâtons est un élément de l'ensemble.
— Souvent on désigne un ensemble par une lettre majuscule, par exemple A et chacun des éléments par une lettre minuscule, par exemple **b** pour le morceau de craie blanche, **r** pour le morceau de craie rouge, **j** pour le morceau de craie jaune, **v** pour le morceau de craie verte. On écrit :

$A = \{ b ; r ; j ; v \}$

L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b est un élément de A.
Soit $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$. 3 est-il un élément de B ? 5 est-il un élément de B ?
Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine C = { lundi ; ..... } . Samedi est-il un élément de cet ensemble ? Midi est-il un élément de cet ensemble ?

II Ensembles égaux

M^me^ Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie désignés par e, f, v.
Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de M^me^ Dulac ?
Quels sont les éléments de l'ensemble N des filles de M^me^ Dulac ?
Les ensembles M et N sont-ils formés des **mêmes** éléments ?
Les ensembles M et N sont **égaux.**
— On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
Les ensembles $B = \{ 10 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $G = \{ 4 ; 2 ; 10 ; 3 \}$ sont égaux. Dis pourquoi.
On donne $H = \{ 10 ; 5 ; 2 ; 3 \}$. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire $B = H$?
P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire $P = \{ a ; b \}$ ou bien $P = \{ b ; a \}$.
P est une **paire.**

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { jan-

- **Personne ne savait où tout cela menait, et cela donnait de drôles de résultats...**

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner 1, additionner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bâton de craie rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie verte. On dit qu'il a dans la main un **ensemble** de bâtons de craie.
— Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont placés dans une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, sur le bureau entourés d'une ficelle ? (oui).
— Chacun des bâtons est un élément de l'ensemble.
— Souvent on désigne un ensemble par une lettre majuscule, par exemple A et chacun des éléments par une lettre minuscule, par exemple **b** pour le morceau de craie blanche, **r** pour le morceau de craie rouge, **j** pour le morceau de craie jaune, **v** pour le morceau de craie verte. On écrit :

$A = \{ b ; r ; j ; v \}$

L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b est un élément de A.
Soit $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$. 3 est-il un élément de B ? 5 est-il un élément de B ?
Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine C = { lundi ; ..... } . Samedi est-il un élément de cet ensemble ? Midi est-il un élément de cet ensemble ?

II Ensembles égaux

Mme Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie désignés par e, f, v.
Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de Mme Dulac ?
Quels sont les éléments de l'ensemble N des filles de Mme Dulac ?
Les ensembles M et N sont-ils formés des **mêmes** éléments ?
Les ensembles M et N sont **égaux.**
— On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
Les ensembles $B = \{ 10 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $G = \{ 4 ; 2 ; 10 ; 3 \}$ sont égaux. Dis pourquoi.
On donne $H = \{ 10 ; 5 ; 2 ; 3 \}$. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire B = H ?
P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire $P = \{ a ; b \}$ ou bien $P = \{ b ; a \}$.
P est une **paire.**

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { janvier ; février ; ...décembre } qu'on appelle **univers.** Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.
L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.
Ecris : F = { janvier ;... }.

IV Ensemble vide

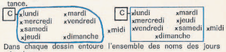
J est un univers de prénoms. J = { André ; Marie ; Hélène ; Christophe ; René }.
K est l'ensemble de ces prénoms qui commencent par la lettre S. Fais le tableau.

éléments de J	
pour K, numéros des éléments de J	

Quel numéro as-tu mis partout ? K a-t-il des éléments ? K est l'ensemble vide.
Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

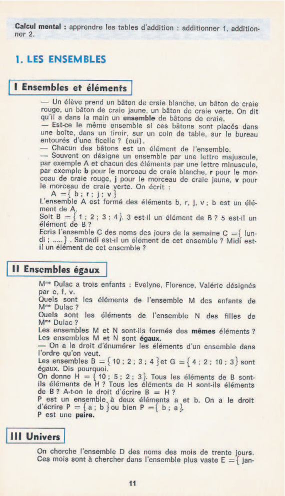
V Diagrammes

Reprenons C = { lundi... }. On représente l'ensemble C au moyen d'un diagramme. La forme de la courbe fermée n'a pas d'importance.



Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.
Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

- **Personne ne savait où tout cela menait, et cela donnait de drôles de résultats...**



Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner 1, additionner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bâton de craie rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie verte. On dit qu'il a dans la main un **ensemble** de bâtons de craie.
— Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont placés dans une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, sur le bureau entourés d'une ficelle ? (oui).
— Chacun des bâtons est un élément de l'ensemble.
— Souvent on désigne un ensemble par une lettre majuscule, par exemple A et chacun des éléments par une lettre minuscule, par exemple **b** pour le morceau de craie blanche, **r** pour le morceau de craie rouge, **j** pour le morceau de craie jaune, **v** pour le morceau de craie verte. On écrit :

$A = \{ b ; r ; j ; v \}$

L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b est un élément de A.
Soit $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$. 3 est-il un élément de B ? 5 est-il un élément de B ?
Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine C = { lundi ; ..... } . Samedi est-il un élément de cet ensemble ? Midi est-il un élément de cet ensemble ?

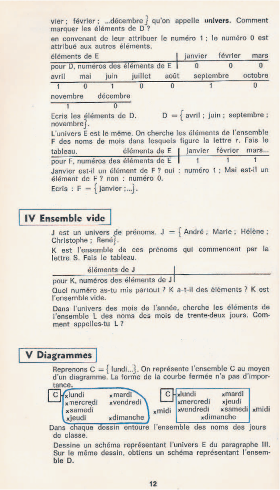
II Ensembles égaux

Mme Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie désignés par e, f, v.
Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de Mme Dulac ?
Quels sont les éléments de l'ensemble N des filles de Mme Dulac ?
Les ensembles M et N sont-ils formés des **mêmes** éléments ?
Les ensembles M et N sont **égaux.**
— On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
Les ensembles $B = \{ 10 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $G = \{ 4 ; 2 ; 10 ; 3 \}$ sont égaux. Dis pourquoi.
On donne $H = \{ 10 ; 5 ; 2 ; 3 \}$. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire B = H ?
P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire $P = \{ a ; b \}$ ou bien $P = \{ b ; a \}$.
P est une **paire.**

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { jan-

11



vier ; février ; ...décembre } qu'on appelle **univers.** Comment marquer les éléments de D ?
en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.
L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.
Ecris : F = { janvier ;...}.

IV Ensemble vide

J est un univers de prénoms. J = { André ; Marie ; Hélène ; Christophe ; René }.
K est l'ensemble de ces prénoms qui commencent par la lettre S. Fais le tableau.

éléments de J	
pour K, numéros des éléments de J	

Quel numéro as-tu mis partout ? K a-t-il des éléments ? K est l'ensemble vide.
Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

V Diagrammes

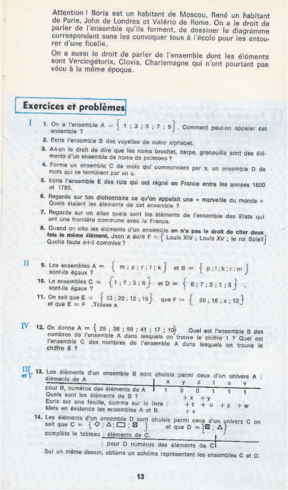
Reprenons C = { lundi...}. On représente l'ensemble C au moyen d'un diagramme. La forme de la courbe fermée n'a pas d'importance.

C ×lundi ×mardi ×mercredi ×vendredi ×samedi ×jeudi ×dimanche ×midi

C ×lundi ×mardi ×mercredi ×jeudi ×vendredi ×samedi ×dimanche ×midi

Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.
Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

12



Attention ! Boris est un habitant de Moscou, René un habitant de Paris, John de Londres et Valério de Rome. On a le droit de parler de l'ensemble qu'ils forment, de dessiner le diagramme correspondant sans les convoquer tous à l'école pour les entourer d'une ficelle.
On a aussi le droit de parler de l'ensemble dont les éléments sont Vercingétorix, Clovis, Charlemagne qui n'ont pourtant pas vécu à la même époque.

Exercices et problèmes

I
1. On a l'ensemble $A = \{ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 \}$. Comment peut-on appeler cet ensemble ?
2. Ecris l'ensemble B des voyelles de notre alphabet.
3. A-t-on le droit de dire que les noms brochet, carpe, grenouille sont des éléments d'un ensemble de noms de poissons ?
4. Forme un ensemble C de mots qui commencent par s, un ensemble D de mots qui se terminent par un u.
5. Ecris l'ensemble E des rois qui ont régné en France entre les années 1600 et 1780.
6. Regarde sur ton dictionnaire ce qu'on appelait une « merveille du monde » Quels étaient les éléments de cet ensemble ?
7. Regarde sur un atlas quels sont les éléments de l'ensemble des Etats qui ont une frontière commune avec la France.
8. Quand on cite les éléments d'un ensemble **on n'a pas le droit de citer deux fois le même élément.** Jean a écrit F = { Louis XIV ; Louis XV ; le roi Soleil } Quelle faute a-t-il commise ?

II
9. Les ensembles A = { m ; p ; r ; l ; k } et B = { p ; l ; k ; r : m } sont-ils égaux ?
10. Le ensembles $C = \{ 1 ; 7 ; 3 ; 6 \}$ et $D = \{ 6 ; 7 ; 3 ; 1 ; 5 \}$ sont-ils égaux ?
11. On sait que $E = \{ 13 ; 20 ; 12 ; 16 \}$ que $F = \{ 20 ; 16 ; x ; 12 \}$ et que E = F .Trouve x.

IV
12. On donne $A = \{ 25 ; 36 ; 59 ; 41 ; 17 ; 10 \}$ .Quel est l'ensemble B des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 1 ? Quel est l'ensemble C des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 8 ?

III et V
13. Les éléments d'un ensemble B sont choisis parmi ceux d'un univers A :

éléments de A	x	y	z	t	u	v
pour B, numéros des éléments de A	1	0	0	1	1	1

Quels sont les éléments de B ?
Ecris sur une feuille, comme sur le livre : + x + y + t + u + z + w + v
Mets en évidence les ensembles A et B.

14. Les éléments d'un ensemble D sont choisis parmi ceux d'un univers C on sait que C = { ◇ ; △ ; ▭ ; ⊠ } et que D = { ⊠ ; △ }
complète le tableau :

éléments de C.	
pour D numéros des éléments de C	

Sur un même dessin, obtiens un schéma représentant les ensembles C et D.

13

De drôles d'exercices...

- **Personne ne savait où tout cela menait, et cela donnait de drôles de résultats...**

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner 1, additionner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bâton de craie rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie verte. On dit qu'il a dans la main un **ensemble** de bâtons de craie.
— Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont placés dans une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, sur le bureau entourés d'une ficelle ? (oui).
— Chacun des bâtons est un élément de l'ensemble.
— Souvent on désigne un ensemble par une lettre majuscule, par exemple A et chacun des éléments par une lettre minuscule, par exemple **b** pour le morceau de craie blanche, **r** pour le morceau de craie rouge, **j** pour le morceau de craie jaune, **v** pour le morceau de craie verte. On écrit :

$A = \{ b ; r ; j ; v \}$

L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b est un élément de A.
Soit $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 \}$. 3 est-il un élément de B ? 5 est-il un élément de B ?
Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine C = { lundi ; ..... } . Samedi est-il un élément de cet ensemble ? Midi est-il un élément de cet ensemble ?

II Ensembles égaux

Mme Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie désignés par e, f, v.
Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de Mme Dulac ?
Quels sont les éléments de l'ensemble N des filles de Mme Dulac ?
Les ensembles M et N sont-ils formés des **mêmes** éléments ?
Les ensembles M et N sont **égaux.**
— On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
Les ensembles $B = \{ 10 ; 2 ; 3 ; 4 \}$ et $G = \{ 4 ; 2 ; 10 ; 3 \}$ sont égaux. Dis pourquoi.
On donne $H = \{ 10 ; 5 ; 2 ; 3 \}$. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire B = H ?
P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire $P = \{ a ; b \}$ ou bien $P = \{ b ; a \}$.
P est une **paire.**

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { jan-

vier ; février ; ...décembre } qu'on appelle **univers.** Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.
Ecris : F = { janvier ;...}.

IV Ensemble vide

J est un univers de prénoms. J = { André ; Marie ; Hélène ; Christophe ; René }.
K est l'ensemble de ces prénoms qui commencent par la lettre S. Fais le tableau.

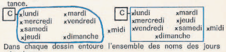
éléments de J	
pour K, numéros des éléments de J	

Quel numéro as-tu mis partout ? K a-t-il des éléments ? K est

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

V Diagrammes

Reprenons C = { lundi...}. On représente l'ensemble C au moyen d'un diagramme. La forme de la courbe fermée n'a pas d'importance.



Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.

Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

Attention ! Boris est un habitant de Moscou, René un habitant de Paris, John de Londres et Valério de Rome. On a le droit de parler de l'ensemble qu'ils forment, de dessiner le diagramme correspondant sans les convoquer tous à l'école pour les entourer d'une ficelle.

On a aussi le droit de parler de l'ensemble dont les éléments sont Vercingétorix, Clovis, Charlemagne qui n'ont pourtant pas vécu à la même époque.

Exercices et problèmes

I
1. On a l'ensemble $A = \{ 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 \}$. Comment peut-on appeler cet ensemble ?
2. Ecris l'ensemble B des voyelles de notre alphabet.
3. A-t-on le droit de dire que les noms brochet, carpe, grenouille sont des éléments d'un ensemble de noms de poissons ?
4. Forme un ensemble C de mots qui commencent par s, un ensemble D de mots qui se terminent par un u.
5. Ecris l'ensemble E des rois qui ont régné en France entre les années 1600 et 1780.
6. Regarde sur ton dictionnaire ce qu'on appelait une « merveille du monde » Quels étaient les éléments de cet ensemble ?
7. Regarde sur un atlas quels sont les éléments de l'ensemble des Etats qui ont une frontière commune avec la France.
8. Quand on cite les éléments d'un ensemble **on n'a pas le droit de citer deux fois le même élément.** Jean a écrit F = { Louis XIV ; Louis XV ; le roi Soleil } Quelle faute a-t-il commise ?

II
9. Les ensembles A = { m ; p ; r ; l ; k } et B = { p ; l ; k ; r ; m } sont-ils égaux ?
10. Le ensembles $C = \{ 1 ; 7 ; 3 ; 6 \}$ et $D = \{ 6 ; 7 ; 3 ; 1 ; 5 \}$ sont-ils égaux ?
11. On sait que $E = \{ 13 ; 20 ; 12 ; 16 \}$ que $F = \{ 20 ; 16 ; x ; 12 \}$ et que E = F .Trouve x.

IV
12. On donne $A = \{ 25 ; 36 ; 59 ; 41 ; 17 ; 10 \}$ .Quel est l'ensemble B des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 1 ? Quel est l'ensemble C des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 8 ?

III et V
13. Les éléments d'un ensemble B sont choisis parmi ceux d'un univers A :

éléments de A	x	y	z	t	u	v
pour B, numéros des éléments de A	1	0	0	1	1	1

Quels sont les éléments de B ?
Ecris sur une feuille, comme sur le livre :
Mets en évidence les ensembles A et B.

+ x + y
+ t + u + z + w
+ v

14. Les éléments d'un ensemble D sont choisis parmi ceux d'un univers C on sait que C = { ◇ ; △ ; ▭ ; ⊠ } et que D = { ⊠ ; △ }
complète le tableau :

éléments de C.	
pour D numéros des éléments de C	

Sur un même dessin, obtiens un schéma représentant les ensembles C et D.

De drôles d'exercices...

- Personne ne savai[...] les de résultats...

vier ; février ; ...décembre } qu'on appelle **univers**. Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.

Ecris : F = { janvier ;...}.

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner [...] ner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

— Un élève prend un bâton de craie blanche, un bât[...] rouge, un bâton de craie jaune, un bâton de craie v[...] qu'il a dans la main un **ensemble** de bâtons de crai[...]
— Est-ce le même ensemble si ces bâtons sont [...] une boîte, dans un tiroir, sur un coin de table, su[...] entourés d'une ficelle ? (oui).
— Chacun des bâtons est un élément de l'ensem[...]
— Souvent on désigne un ensemble par une lettre [...] par exemple A et chacun des éléments par une lettre [...] par exemple **b** pour le morceau de craie blanche, **r** p[...] ceau de craie rouge, **j** pour le morceau de craie ja[...] le morceau de craie verte. On écrit :

A = { b ; r ; j ; v }

L'ensemble A est formé des éléments b, r, j, v ; b [...] ment de A.
Soit B = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 }. 3 est-il un élément de B ? [...] élément de B ?
Ecris l'ensemble C des noms des jours de la semaine [...] di ; ..... } . Samedi est-il un élément de cet ensemble [...] il un élément de cet ensemble ?

II Ensembles égaux

Mme Dulac a trois enfants : Evelyne, Florence, Valérie désignés par e, f, v.
Quels sont les éléments de l'ensemble M des enfants de Mme Dulac ?
Quels sont les éléments de l'ensemble N des filles de Mme Dulac ?
Les ensembles M et N sont-ils formés des **mêmes** éléments ?
Les ensembles M et N sont **égaux.**
— On a le droit d'énumérer les éléments d'un ensemble dans l'ordre qu'on veut.
Les ensembles B = { 10 ; 2 ; 3 ; 4 } et G = { 4 ; 2 ; 10 ; 3 } sont égaux. Dis pourquoi.
On donne H = { 10 ; 5 ; 2 ; 3 }. Tous les éléments de B sont-ils éléments de H ? Tous les éléments de H sont-ils éléments de B ? A-t-on le droit d'écrire B = H ?
P est un ensemble à deux éléments a et b. On a le droit d'écrire P = { a ; b } ou bien P = { b ; a }.
P est une **paire.**

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { jan-

11

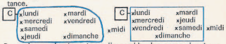
éléments de J	
pour K, numéros des éléments de J	

Quel numéro as-tu mis partout ? K a-t-il des éléments ? K est

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

V Diagrammes

Reprenons C = { lundi...}. On représente l'ensemble C au moyen d'un diagramme. La forme de la courbe fermée n'a pas d'importance.



Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.

Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

12

[...]on ! Boris est un habitant de Moscou, René un habitant [...]s, John de Londres et Valério de Rome. On a le droit de [...] de l'ensemble qu'ils forment, de dessiner le diagramme [...]pondant sans les convoquer tous à l'école pour les entou[...]ne ficelle.
[...]ussi le droit de parler de l'ensemble dont les éléments [...]ercingétorix, Clovis, Charlemagne qui n'ont pourtant pas [...] la même époque.

[...] problèmes

[...]nsemble A = { 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 }. Comment peut-on appeler cet [...] ?
[...]nsemble B des voyelles de notre alphabet.
[...] droit de dire que les noms brochet, carpe, grenouille sont des élé[...]n ensemble de noms de poissons ?
[...] ensemble C de mots qui commencent par s, un ensemble D de [...]se terminent par un u.
[...]semble E des rois qui ont régné en France entre les années 1600
[...]sur ton dictionnaire ce qu'on appelait une « merveille du monde » [...]ient les éléments de cet ensemble ?
[...]sur un atlas quels sont les éléments de l'ensemble des Etats qui [...]rontière commune avec la France.
[...] cite les éléments d'un ensemble **on n'a pas le droit de citer deux** [...]**me élément.** Jean a écrit F = { Louis XIV ; Louis XV ; le roi Soleil } [...]te a-t-il commise ?

[...]embles A = { m ; p ; r ; l ; k } et B = { p ; l ; k ; r ; m } sont-ils égaux ?

10. Le ensembles C = { 1 ; 7 ; 3 ; 6 } et D = { 6 ; 7 ; 3 ; 1 ; 5 } sont-ils égaux ?

11. On sait que E = { 13 ; 20 ; 12 ; 16 } que F = { 20 ; 16 ; x ; 12 } et que E = F .Trouve x.

IV **12.** On donne A = { 25 ; 36 ; 59 ; 41 ; 17 ; 10 } .Quel est l'ensemble B des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 1 ? Quel est l'ensemble C des nombres de l'ensemble A dans lesquels on trouve le chiffre 8 ?

III et V **13.** Les éléments d'un ensemble B sont choisis parmi ceux d'un univers A :

éléments de A	x	y	z	t	u	v
pour B, numéros des éléments de A	1	0	0	1	1	1

Quels sont les éléments de B ?
Ecris sur une feuille, comme sur le livre : + x + y + t + u + z + w + v
Mets en évidence les ensembles A et B.

14. Les éléments d'un ensemble D sont choisis parmi ceux d'un univers C on sait que C = { ◇ ; △ ; ▭ ; ⊠ } et que D = { ⊠ ; △ }
complète le tableau :

éléments de C.	
pour D numéros des éléments de C	

Sur un même dessin, obtiens un schéma représentant les ensembles C et D.

13

- Personne ne savai[...] les de résultats...

vier ; février ; ...décembre } qu'on appelle **univers**. Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.

Ecris : F = { janvier ;...}.

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

Symboles - Égalités

3

Le signe 3 est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.

Le symbole Δ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

3 + 2

5

3 + 2 = 5

3 + 2 et 5 désignent le même nombre.

= rouge

On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

B

a

a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.

B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

6 est le symbole qui désigne ce coureur.

A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

n

On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

n = 4

EXERCICES

• 1. Dessine quatre étiquettes désignant des couleurs. Pour chacune écris une égalité. Recommence avec 3 étiquettes pour désigner des formes.

• 2. Quelle est la signification de cette étiquette?
Complète l'égalité avec une étiquette écrite en lettres

= ...

Ecris de même une égalité avec chacun des symboles

• 3. Ce symbole concerne la couleur : désigne-t-il une couleur? Pourquoi?

• 4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?

Que désigne-t-il aussi dans le cas des jetons de cette boîte?
Fais un dessin des jetons en utilisant le symbole précédent et d'autres symboles dans le schéma. Peux-tu écrire une égalité?

• 5. = rond

Que penses-tu de cette égalité? Elle peut être vraie, si on ne considère que certains objets : dessine un tel ensemble d'objets, en utilisant les symboles précédents dans le schéma.

• 6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.
bleu = ... non vert = ...
non carré = ... = ...

• 7. Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.

Recommence avec chacun des deux autres non

Complète l'égalité :

non = ...

• 8. Complète les égalités

non = ...

non = ...

• 9. = rouge = ...

Il existe des gens qui écriraient un autre mot pour désigner cette couleur : de qui peut-il s'agir? Comment pourrais-tu chercher un tel mot? Essaie.

• 10. carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus commode? Pourquoi?

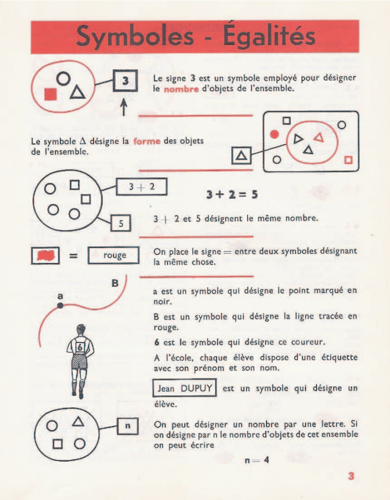
• 11.

Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi?
Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

• 12. Essaie de dessiner deux symboles pour désigner chacune des propriétés : mince, épais.

• 13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

Dessine une 3e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.



Symboles - Égalités

Le signe **3** est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.

Le symbole Δ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

3 + 2 = 5

3 + 2 et 5 désignent le même nombre.

= rouge

On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.

B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

6 est le symbole qui désigne ce coureur.

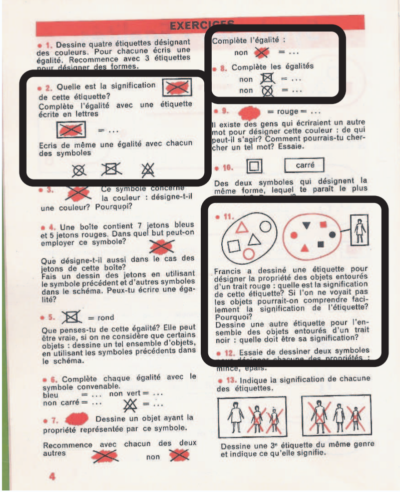
A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

n = 4

3



EXERCICES

• 1. Dessine quatre étiquettes désignant des couleurs. Pour chacune écris une égalité. Recommence avec 3 étiquettes pour désigner des formes.

• 2. Quelle est la signification de cette étiquette?
Complète l'égalité avec une étiquette écrite en lettres

= ...

Ecris de même une égalité avec chacun des symboles

• 3. Ce symbole concerne la couleur : désigne-t-il une couleur? Pourquoi?

• 4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?

Que désigne-t-il aussi dans le cas des jetons de cette boîte?
Fais un dessin des jetons en utilisant le symbole précédent et d'autres symboles dans le schéma. Peux-tu écrire une égalité?

• 5. = rond

Que penses-tu de cette égalité? Elle peut être vraie, si on ne considère que certains objets : dessine un tel ensemble d'objets, en utilisant les symboles précédents dans le schéma.

• 6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.
bleu = ... non vert = ...
non carré = ... = ...

• 7. Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.

Recommence avec chacun des deux autres non

Complète l'égalité :
non = ...

• 8. Complète les égalités
non = ...
non = ...

• 9. = rouge = ...

Il existe des gens qui écriraient un autre mot pour désigner cette couleur : de qui peut-il s'agir? Comment pourrais-tu chercher un tel mot? Essaie.

• 10. carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus

• 11.

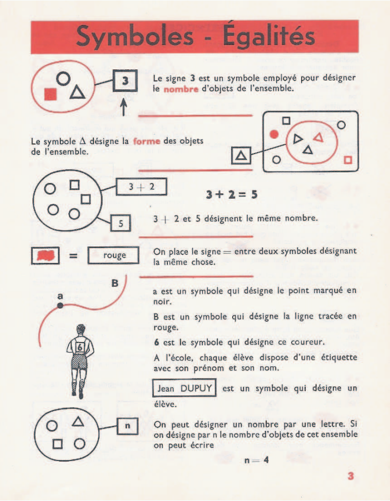
Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi?
Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

• 12. Essaie de dessiner deux symboles pour désigner chacune des propriétés : mince, épais.

• 13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

Dessine une 3e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.

4



Symboles - Égalités

Le signe 3 est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.

Le symbole △ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

3 + 2 = 5

3 + 2 et 5 désignent le même nombre.

On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.

B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

6 est le symbole qui désigne ce coureur.

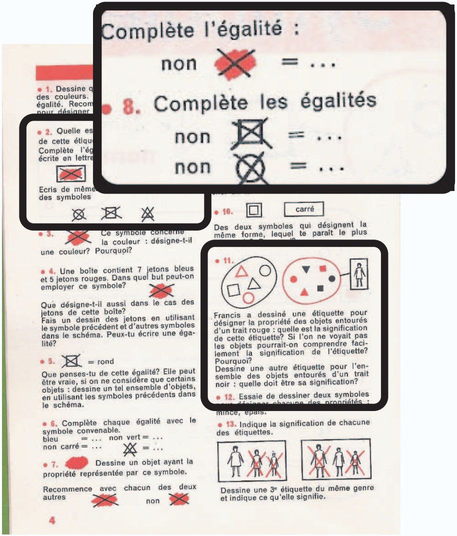
A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

n = 4

3



Complète l'égalité :

non = ...

8. Complète les égalités

non = ...

non = ...

2. Quelle es…

Ecris de même des symboles

3. Ce symbole concerne la couleur : désigne-t-il une couleur? Pourquoi?

4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?

Que désigne-t-il aussi dans le cas des jetons de cette boîte?
Fais un dessin des jetons en utilisant le symbole précédent et d'autres symboles dans le schéma. Peux-tu écrire une égalité?

5. = rond

Que penses-tu de cette égalité? Elle peut être vraie, si on ne considère que certains objets : dessine un tel ensemble d'objets, en utilisant les symboles précédents dans le schéma.

6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.

bleu = ... non vert = ...

non carré = ... = ...

7. Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.

Recommence avec chacun des deux autres non

4

10. carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus

11. Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi?
Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

12. Essaie de dessiner deux symboles … mince, épais.

13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

Dessine une 3e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.

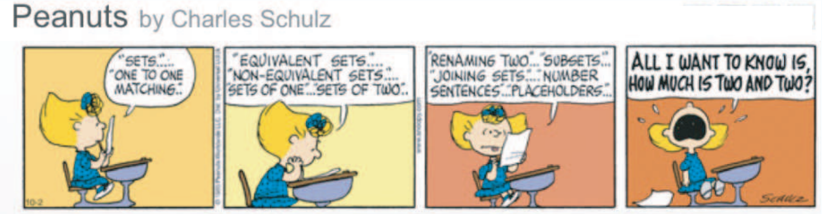

Serge BERMAN
René BEZARD
mathématiques pour papa
Serge BERMAN
René BEZARD
mathématiques pour maman
J. DAVID
CINQUIEME EDITION
EDITIONS CHIRON - PARIS

Le casse-tête des parents

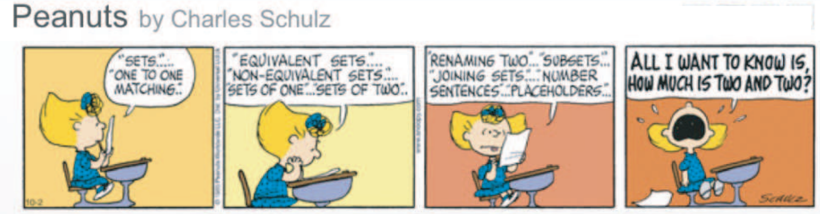
« Si vous ne voulez pas perdre la face, parents, ce livre est fait pour vous, car vous devez d'abord comprendre la véritable nature des mathématiques modernes. »

- **Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA**

- **Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA**

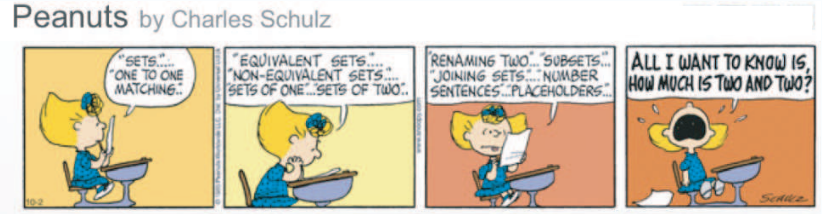


- Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA



- Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement

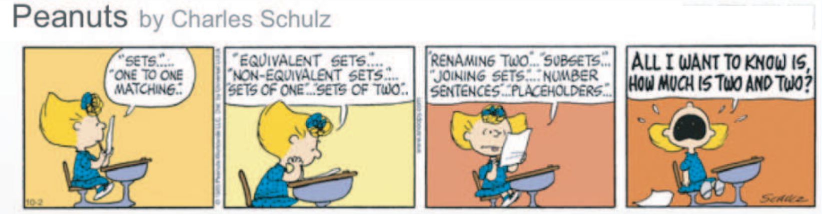
- **Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA**



- **Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement**

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- **Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA**

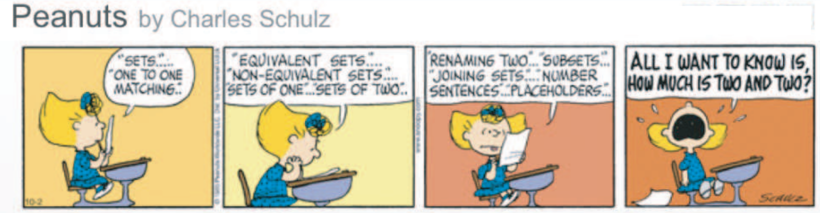


- **Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement**

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- **Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais**

- Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA



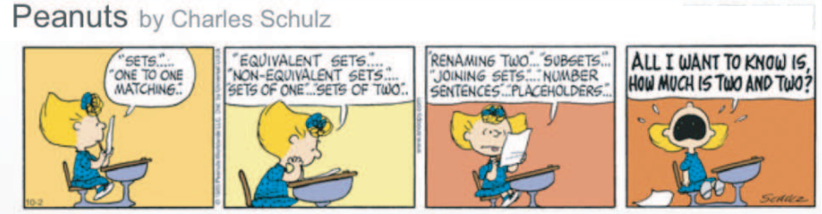
- Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais

Comment en est-on arrivé à ce gâchis ?

- Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA



- Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais

Comment en est-on arrivé à ce gâchis ?
Et, à propos, la théorie des ensembles, qu'est-ce que c'est ?

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. **Le temps des pionniers (1873–1900)**
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. Et aujourd'hui ?

- La théorie des ensembles, c'est une théorie de l'infini.

- La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

- Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$

- La théorie des ensembles, c'est une théorie de l'infini.

- Depuis l'Antiquité, l'idée de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$
  mais c'est une limite inatteignable,

- La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

- Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, **pas** un objet d'étude mathématique.

- **La théorie des ensembles, c'est une théorie de l'infini.**

- **Depuis l'Antiquité, l'idée de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, pas un objet d'étude mathématique.**

- **Et puis Cantor est arrivé...**

• La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

• Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, **pas** un objet d'étude mathématique.

Georg Cantor

• Et puis **Cantor** est arrivé...

- La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

- Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, **pas** un objet d'étude mathématique.

Georg Cantor

- Et puis **Cantor** est arrivé...

- 1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur la question de la **numérotabilité**

Richard Dedekind

• La théorie des ensembles, c'est une théorie de l'infini.

• Depuis l'Antiquité, l'idée de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, pas un objet d'étude mathématique.

Georg Cantor

• Et puis Cantor est arrivé...

• 1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur la question de la numérotabilité

• 7 décembre 1873 : lettre à Dedekind...

Richard Dedekind

- La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

- Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\dots$ mais c'est une limite inatteignable, **pas** un objet d'étude mathématique.


Georg Cantor

- Et puis **Cantor** est arrivé...

- 1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur la question de la **numérotabilité**

- **7 décembre 1873** : lettre à Dedekind...
  « *L'infini des nombres entiers n'est pas celui des nombres réels.* »


Richard Dedekind

- La **théorie des ensembles**, c'est une théorie de **l'infini**.

- Depuis l'Antiquité, l'**idée** de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, **pas** un objet d'étude mathématique.

Georg Cantor

- Et puis **Cantor** est arrivé...
- 1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur la question de la **numérotabilité**
- **7 décembre 1873** : lettre à Dedekind...
  « *L'infini des nombres entiers n'est pas celui des nombres réels.* »

Richard Dedekind

La **théorie des ensembles** est née...

- **De quoi parle Cantor ?**

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d’un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

$$\cdots \quad -3\bullet \quad -2\bullet \quad -1\bullet \quad \bullet 0 \quad \bullet 1 \quad \bullet 2 \quad \bullet 3 \quad \bullet 4 \quad \cdots$$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

$$\cdots \quad -3\bullet \quad -2\bullet \quad -1\bullet \quad \overset{0}{\bullet}\,0 \quad \bullet\,1 \quad \bullet\,2 \quad \bullet\,3 \quad \bullet\,4 \quad \cdots$$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d’un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

				0	1				
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

Numéroter les éléments d'un ensemble

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

$$\cdots \quad -3\,\bullet \quad -2\,\bullet \quad \overset{2}{-1\,\bullet} \quad \overset{0}{\bullet\,0} \quad \overset{1}{\bullet\,1} \quad \bullet\,2 \quad \bullet\,3 \quad \bullet\,4 \quad \cdots$$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

			2	0	1	3			
⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	⋯

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

		4	2	0	1	3			
···	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	···

Numéroter les éléments d'un ensemble

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

		4	2	0	1	3	5		
...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

Numéroter les éléments d'un ensemble

- De quoi parle Cantor ?

  De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- On peut numéroter les entiers relatifs :

	6	4	2	0	1	3	5		
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

Numéroter les éléments d'un ensemble

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	**4**	**2**	**0**	**1**	**3**	**5**	**7**	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

Numéroter les éléments d'un ensemble

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	**4**	**2**	**0**	**1**	**3**	**5**	**7**	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

$\frac{1}{1}$ $\quad \frac{2}{1}$ $\quad \frac{3}{1}$ $\quad \frac{4}{1}$ $\quad \frac{5}{1}$ …

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \dots \end{array}$$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	$\mathbf{6}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{7}$	
$\dots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\dots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dots$

Numéroter les éléments d'un ensemble

- De quoi parle Cantor ?

  De la possibilité de **numéroter** les éléments d'un ensemble (infini).

- On peut numéroter les entiers relatifs :

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	**4**	**2**	**0**	**1**	**3**	**5**	**7**	
…	-3 ●	-2 ●	-1 ●	● 0	● 1	● 2	● 3	● 4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

● $\frac{1}{1}$	● $\frac{2}{1}$	● $\frac{3}{1}$	● $\frac{4}{1}$	● $\frac{5}{1}$	…
● $\frac{1}{2}$	● $\frac{2}{2}$	● $\frac{3}{2}$	● $\frac{4}{2}$	● $\frac{5}{2}$	…
● $\frac{1}{3}$	● $\frac{2}{3}$	● $\frac{3}{3}$	● $\frac{4}{3}$	● $\frac{5}{3}$	…
● $\frac{1}{4}$	● $\frac{2}{4}$	● $\frac{3}{4}$	● $\frac{4}{4}$	● $\frac{5}{4}$	…
● $\frac{1}{5}$	● $\frac{2}{5}$	● $\frac{3}{5}$	● $\frac{4}{5}$	● $\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\dots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0: $\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\dots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\dots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\dots$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d’un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\dots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0: $\frac{1}{1}$	1: $\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\dots$
2: $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\dots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\dots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\dots$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
2 $\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0: $\frac{1}{1}$	1: $\frac{2}{1}$	3: $\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\cdots$
2: $\frac{1}{2}$	4: $\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\cdots$
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
5 $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0: $\frac{1}{1}$	1: $\frac{2}{1}$	3: $\frac{3}{1}$	6: $\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
2: $\frac{1}{2}$	4: $\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5: $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\cdots$
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
5 $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$

Numéroter les éléments d'un ensemble

- De quoi parle Cantor ?

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- On peut numéroter les entiers relatifs :

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d’un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
	6	4	2	0	1	3	5	7	

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 : $\frac{1}{1}$	1 : $\frac{2}{1}$	3 : $\frac{3}{1}$	6 : $\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
2 : $\frac{1}{2}$	4 : $\frac{2}{2}$	7 : $\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5 : $\frac{1}{3}$	8 : $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
9 : $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	10 $\frac{5}{1}$	…
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
9 $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

$$\begin{array}{cccccccccc} & 6 & 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & \\ \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

$$\begin{array}{cccccc}
\overset{0}{\tfrac{1}{1}} & \overset{1}{\tfrac{2}{1}} & \overset{3}{\tfrac{3}{1}} & \overset{6}{\tfrac{4}{1}} & \overset{10}{\tfrac{5}{1}} & \cdots \\
\overset{2}{\tfrac{1}{2}} & \overset{4}{\tfrac{2}{2}} & \overset{7}{\tfrac{3}{2}} & \overset{11}{\tfrac{4}{2}} & \tfrac{5}{2} & \cdots \\
\overset{5}{\tfrac{1}{3}} & \overset{8}{\tfrac{2}{3}} & \tfrac{3}{3} & \tfrac{4}{3} & \tfrac{5}{3} & \cdots \\
\overset{9}{\tfrac{1}{4}} & \tfrac{2}{4} & \tfrac{3}{4} & \tfrac{4}{4} & \tfrac{5}{4} & \cdots \\
\tfrac{1}{5} & \tfrac{2}{5} & \tfrac{3}{5} & \tfrac{4}{5} & \tfrac{5}{5} & \cdots
\end{array}$$

Numéroter les éléments d'un ensemble

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

…	6	4	2	0	1	3	5	7	…
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	10 $\frac{5}{1}$	…
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	11 $\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	12 $\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
9 $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

	6	4	2	0	1	3	5	7	
$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	10 $\frac{5}{1}$	$\cdots$
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	11 $\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	12 $\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
9 $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$

$\rightsquigarrow$ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

$\uparrow$

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

$\rightsquigarrow$ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

$\uparrow$

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

$\uparrow$

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

- **Démonstration : Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n.**

$\rightsquigarrow$ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

$\uparrow$

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation
(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration : Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n**
(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) **:**

$$x_0 = \ldots,$$

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

- **Démonstration : Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n**

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$x_0 = \ldots, \ c_{0,0}$$

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

- **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n (s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$x_0 = \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}$$

$\rightsquigarrow$ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration : Soient $x_0, x_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n**

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\dots$) **:**

$$x_0 = \dots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ \dots$$

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n (s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$x_0 = \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ \ldots$$
$$x_1 = \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ \ldots$$

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

• Démonstration : Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) **:**

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \ \ldots \end{aligned}$$

etc.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.
↑
les nombres réels racines d'une équation
(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n (s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = \quad 0,\ c^{\#}_{0,0}\ \ c^{\#}_{1,1}\ \ c^{\#}_{2,2}\ \ldots$$

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\dots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \dots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \dots \\ x_1 &= \dots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \dots \\ x_2 &= \dots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \dots \end{aligned} \qquad \text{etc.}$$

Considérons le réel

$$x = \ 0,\ c_{0,0}^{\#}\ \ c_{1,1}^{\#}\ \ c_{2,2}^{\#}\ \dots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$,

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.
↑
les nombres réels racines d'une équation
(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n
(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ c_{0,1}\ c_{0,2}\ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ c_{1,1}\ c_{1,2}\ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ c_{2,1}\ c_{2,2}\ \ldots \end{aligned}$$

etc.

Considérons le réel

$$x = 0,\ c_{0,0}^{\#}\ c_{1,1}^{\#}\ c_{2,2}^{\#}\ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = \ 0,\ c_{0,0}^{\#}\ \ c_{1,1}^{\#}\ \ c_{2,2}^{\#}\ \ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.
  ↑
  les nombres réels racines d'une équation
  (en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n
(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = 0,\ c_{0,0}^{\#}\ \ c_{1,1}^{\#}\ \ c_{2,2}^{\#}\ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation
(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n
(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ c_{0,1}\ c_{0,2}\ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ c_{1,1}\ c_{1,2}\ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ c_{2,1}\ c_{2,2}\ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = \quad 0,\ c_{0,0}^{\#}\ c_{1,1}^{\#}\ c_{2,2}^{\#}\ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑
les nombres réels racines d'une équation
(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

- **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \dots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n
(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\dots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \dots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \dots \\ x_1 &= \dots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \dots \\ x_2 &= \dots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \dots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = 0,\ c^{\#}_{0,0}\ \ c^{\#}_{1,1}\ \ c^{\#}_{2,2}\ \dots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \dots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n.

⇝ **Pourrait-on numéroter tous les ensembles infinis ?**

• (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

• **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

• **Démonstration :** Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ c_{0,1}\ c_{0,2}\ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ c_{1,1}\ c_{1,2}\ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ c_{2,1}\ c_{2,2}\ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = 0,\ c^{\#}_{0,0}\ c^{\#}_{1,1}\ c^{\#}_{2,2}\ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n. $\square$

- Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents...

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration,

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• **Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.**

• **Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.**
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• **1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini,**

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑

compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$0,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$0, 1,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :
↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \omega,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}+\mathbf{2}, \ldots,$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :
↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega$$

• Si on **démontre** qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est **accessible aux mathématiques**.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'**exploration**.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor **explore** le monde de l'infini, en utilisant comme **outils** les **ensembles** et les **ordinaux transfinis** :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2,$$

- Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

- Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
  Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
  (comme les nombres entiers ou la géométrie)

- 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :
  ↑
  compter au-delà du fini
  avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots,$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}+\mathbf{1}, \boldsymbol{\omega}+\mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{2}, \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{2}+\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{3},$$

Naissance d’une théorie...

• Si on démontre qu’il y a (au moins) deux infinis différents... c’est que l’infini est objet de démonstration, et donc qu’il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l’infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l’infini devient objet de démonstration, donc d’exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l’infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2, \omega^2+1, \ldots$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$
$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega,$$

Naissance d'une théorie...

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$
$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3,$$

• Si on **démontre** qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est **accessible aux mathématiques**.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'**exploration**.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor **explore** le monde de l'infini, en utilisant comme **outils** les **ensembles** et les **ordinaux transfinis** :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$
$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega,$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques. Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.

(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑

compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$
$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega+1,$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$
$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots, \omega^{\omega^2},$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :
↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$

$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^\omega},$$

• Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

• Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
(comme les nombres entiers ou la géométrie)

• 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$

$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^{\omega}, \omega^{\omega}+1, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^{\omega}}, \ldots \text{ etc.}$$

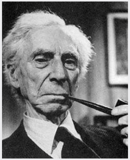
Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. **Le temps des malentendus (1900–1970)**
3. Et aujourd'hui ?

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »

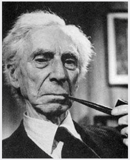
- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »

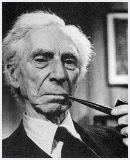


Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ **n'existe pas,**

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé :** **qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »

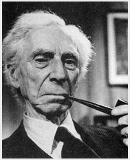


Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$,

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »

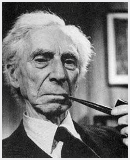


Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathbf{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »

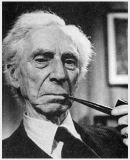


Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $E = \{X \mid X \notin X\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $E \in E$, qui entraîne $E \notin E$, donc est impossible,
ou bien $E \notin E$,

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



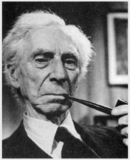
Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $E = \{X \mid X \notin X\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $E \in E$, qui entraîne $E \notin E$, donc est impossible,
ou bien $E \notin E$, qui entraîne $E \in E$, donc est impossible.

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**

- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

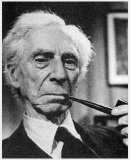
L'ensemble $\mathbf{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,
ou bien $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles,**

Des difficultés... et une solution

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**

- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



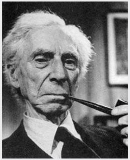
Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \notin \mathrm{X}\}$ n'existe pas, car sinon on aurait
ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,
ou bien $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent :**

- **Un problème mal (incomplètement) posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



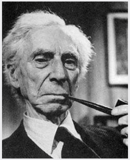
Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathbf{X} \mid \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$ n'existe pas, car sinon on aurait
ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,
ou bien $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu (axiomes).**

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

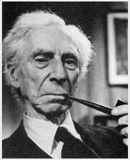
L'ensemble $E = \{X \mid X \notin X\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $E \in E$, qui entraîne $E \notin E$, donc est impossible,
ou bien $E \notin E$, qui entraîne $E \in E$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu** (axiomes)**.**

Ernst Zermelo

- **1908 : système de Zermelo**

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »


Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

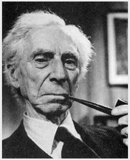
L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \notin \mathrm{X}\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,
ou bien $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu** (axiomes)**.**


Ernst Zermelo

- **1908 : système de Zermelo**
- **1922 : système de Zermelo-Fraenkel** ZF

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $E = \{X \mid X \notin X\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $E \in E$, qui entraîne $E \notin E$, donc est impossible,
ou bien $E \notin E$, qui entraîne $E \in E$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu** (axiomes).

Ernst Zermelo

- **1908 : système de Zermelo**
- **1922 : système de Zermelo-Fraenkel** ZF

↑
objet d'un consensus :
« oui, les ensembles, ça fonctionne comme cela »...

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?
- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**


David Hilbert

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.


David Hilbert


John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

David Hilbert

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.

John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.


David Hilbert


John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

David Hilbert

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,**
- **représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,**
- **représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,**

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,**
- **représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,**
- **représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,**
- **représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,**

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,**
- **représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,**
- **représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,**
- **représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,**

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.


David Hilbert


John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,


David Hilbert

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.


John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$,

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.

David Hilbert

John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{Dom}(f)\}$, etc.

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

David Hilbert

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$, etc.

- **Toutes les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !**

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,**
- **représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,**
- **représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,**
- **représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,**

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- **représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,**
- **représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}(f)\}$, etc.**

- **Toutes les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !**

⇝ Pour montrer que les mathématiques sont sans contradiction,

- Début XXe siècle : « crise des fondements » :
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.

David Hilbert

John von Neumann

- Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,
- représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,
- représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,
- représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{Dom}(f)\}$, etc.

- Toutes les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que les mathématiques sont sans contradiction,
il suffit de montrer que la théorie des ensembles est sans contradiction.

- **Années 30 : chiche !**

- **Années 30 : chiche !**
- **Nicolas Bourbaki,**

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

Une grande aventure intellectuelle

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

  les nombres sont des ensembles,

Une grande aventure intellectuelle

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

Une grande aventure intellectuelle

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

  les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- Bien sûr, cela marche très bien (aucun risque technique...)

  ...et ce succès inspire les pédagogues :

Une grande aventure intellectuelle

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- Bien sûr, cela marche très bien (aucun risque technique...)

...et ce succès inspire les pédagogues :

- Puisque tout est ensemble, il faut mettre les ensembles à la base de l'enseignement :

- Années 30 : chiche !
- Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.
- Un travail colossal et admirable

- Une option hardie : puisqu'on a le choix (on repart du début) et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons **Tout est ensemble !**

les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- Bien sûr, cela marche très bien (aucun risque technique...) ...et ce succès inspire les pédagogues :
- Puisque tout est ensemble, il faut mettre les ensembles à la base de l'enseignement :

« *Le Professeur Dieudonné lance le cri de guerre de la nouvelle croisade : "À bas Euclide !"* »


Jean Dieudonné

- **Années 30 : chiche !**
- **Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.**
- **Un travail colossal et admirable**

- **Une option hardie : puisqu'on a le choix** (on repart du début) **et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons**

Tout est ensemble !

les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- **Bien sûr, cela marche très bien** (aucun risque technique...)
  ...et ce succès inspire les pédagogues :
- **Puisque tout est ensemble, il faut mettre les ensembles à la base de l'enseignement :**

« *Le Professeur Dieudonné lance le cri de guerre de la nouvelle croisade : "À bas Euclide !"* »

...Et vive la réforme des « maths modernes » !


Jean Dieudonné

- **Hélas on avait oublié deux choses...**


Kurt Gödel

- **Hélas on avait oublié deux choses...**

Kurt Gödel

- **Hélas on avait oublié deux choses...**
- **1931 : Théorèmes d'incomplétude :**

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...
- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles,

Kurt Gödel

• Hélas on avait oublié deux choses...

• 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

$\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

• Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent,

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  ⇝ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

Alonzo Church

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\leadsto$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

  comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

Alonzo Church


Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

  comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
  comme fonction : 3 est représenté par $\lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$,...


Alonzo Church

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

  comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
  comme fonction : 3 est représenté par $\lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$,...

  puis la théorie des catégories (« tout est diagramme »), etc.

Alonzo Church

Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  ⇝ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

  comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
  comme fonction : 3 est représenté par $\lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$,...

  puis la théorie des catégories (« tout est diagramme »), etc.

Alonzo Church

⇝ fonder tout sur les ensembles ne peut être qu'une option technique, rien d'autre.

Kurt Gödel

• Hélas on avait oublié deux choses...

• 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

$\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

• Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

• Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
comme fonction : 3 est représenté par $\lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$,...

puis la théorie des catégories (« tout est diagramme »), etc.

Alonzo Church

$\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles ne peut être qu'une option technique, rien d'autre.

Il n'y a(vait) donc aucune raison de fonder l'enseignement sur les ensembles...

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**

  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)

  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- **Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques :**

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- **Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient** (peut-être) **ce qu'ils faisaient,**

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- **Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient** (peut-être) **ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !**

- **Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?**
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- **Parce que ces résultats étaient** (et restent) **difficiles,**
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- **Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient** (peut-être) **ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !**

Une convention technique commode (« tout est ensemble »)
n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

- Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- Parce que ces résultats étaient (et restent) difficiles,
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !

Une convention technique commode (« tout est ensemble »)
n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

- Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- Parce que ces résultats étaient (et restent) difficiles,
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !

Une convention technique commode (« tout est ensemble ») n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

- De surcroît : problème de formation des enseignants (et pour cause...)

- Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- Parce que ces résultats étaient (et restent) difficiles,
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !

Une convention technique commode (« tout est ensemble ») n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

- De surcroît : problème de formation des enseignants (et pour cause...)

$\rightsquigarrow$ L'échec et le rejet étaient (probablement) inévitables.

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. **Et aujourd'hui ?**

- **Back to... les débuts.**

- **Back to… les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ;

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :**

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis,**

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**

$$\aleph_0$$

- **Back to… les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2$$

- **Back to… les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts**
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**
  $$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- **Le cardinal** (la taille) **de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.**

- **Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts** celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) **; il a montré plus :**

- **(Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite**

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- **Le cardinal** (la taille) **de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.**
  Le cardinal (la taille) **de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.**

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite
  $$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

Est-ce $\aleph_1$?

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite
$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

Est-ce $\aleph_1$? ou $\aleph_2$?

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

Est-ce $\aleph_1$? ou $\aleph_2$? ou un autre $\aleph_\alpha$?

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite
$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

  Est-ce $\aleph_1$? ou $\aleph_2$? ou un autre $\aleph_\alpha$?

- Cantor pensait que la réponse était $\aleph_1$ (« hypothèse du continu »).

- Back to... les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite
  $$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

  Est-ce $\aleph_1$? ou $\aleph_2$? ou un autre $\aleph_\alpha$?

- Cantor pensait que la réponse était $\aleph_1$ (« hypothèse du continu »).

- (1900, Hilbert) Le problème du continu est le numéro 1
  sur la liste des 23 problèmes pour le XXe siècle.

- **(1920's) Consensus sur le système de Zermelo–Fraenkel ZF comme point de départ de la théorie des ensembles.**

- (1920's) Consensus sur le système de Zermelo–Fraenkel ZF comme point de départ de la théorie des ensembles.
  - $\leadsto$ Première question : L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

- (1920's) Consensus sur le système de Zermelo–Fraenkel ZF comme point de départ de la théorie des ensembles.

  $\rightsquigarrow$ Première question : L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

Kurt Gödel

- (Gödel, 1938) Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.

- (1920's) Consensus sur le système de Zermelo–Fraenkel ZF comme point de départ de la théorie des ensembles.

  ⇝ Première question : L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

Kurt Gödel

- (Gödel, 1938) Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.

Paul Cohen

- (Cohen, 1963) Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas prouvable à partir de ZF.

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  $\rightsquigarrow$ Le problème du continu est-il résolu ?

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**
  - ⇝ **Le problème du continu est-il résolu ? Non.**

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**
  - ⇝ **Le problème du continu est-il résolu ? Non.**
    est-il dépourvu de sens ?

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  $\rightsquigarrow$ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**
  - ⇝ **Le problème du continu est-il résolu ? Non.**
    est-il dépourvu de sens ? Non.
    est-il indécidable, ni vrai, ni faux ?

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
    - $\rightsquigarrow$ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
      est-il dépourvu de sens ? Non.
      est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  ⇝ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  $\rightsquigarrow$ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**
  - ⇝ **Le problème du continu est-il résolu ? Non.**
    est-il dépourvu de sens ? Non.
    est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- **Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :**
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - **le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,**
  - **il reste des propriétés de base à découvrir.**

- **Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?**
  - $\rightsquigarrow$ **Le problème du continu est-il résolu ? Non.**
    est-il dépourvu de sens ? Non.
    est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- **Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :**
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,
  - il reste des propriétés de base à découvrir.

- **Un système d'axiomes,** ça ne se démontre pas, **c'est l'objet d'un consensus :**

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  ⇝ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,
  - il reste des propriétés de base à découvrir.

- Un système d'axiomes, ça ne se démontre pas, c'est l'objet d'un consensus :

> « Aujourd'hui (en 1922), nous sommes d'accord pour déclarer que
> le système ZF représente correctement notre intuition des ensembles ».

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  ⇝ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,
  - il reste des propriétés de base à découvrir.

- Un système d'axiomes, ça ne se démontre pas, c'est l'objet d'un consensus :

> « Aujourd'hui (en 1922), nous sommes d'accord pour déclarer que
> le système ZF représente correctement notre intuition des ensembles ».

- Aujourdui, 90 ans après ZF, en savons-nous plus,
  et un consensus pour un nouveau système a-t-il émergé ?

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  ⇝ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,
  - il reste des propriétés de base à découvrir.

- Un système d'axiomes, ça ne se démontre pas, c'est l'objet d'un consensus :

> « Aujourd'hui (en 1922), nous sommes d'accord pour déclarer que
> le système ZF représente correctement notre intuition des ensembles ».

- Aujourdui, 90 ans après ZF, en savons-nous plus,
  et un consensus pour un nouveau système a-t-il émergé ? Oui !

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Quels nouveaux axiomes ?**
- **Axiomes de grands cardinaux :**

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux :**

- **Quels nouveaux axiomes ?**
- **Axiomes de grands cardinaux :**

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\textbf{ultra-infini}}{\textbf{infini}} = \frac{\textbf{infini}}{\textbf{fini}}.$$

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables », « détermination projective » (DP), ...

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« **détermination projective** » (DP), ...

- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« détermination projective » (DP), ...

- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**

... parce ce que des théorèmes le disent.

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« détermination projective » (DP), ...

- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**
  ... parce ce que des théorèmes le disent.

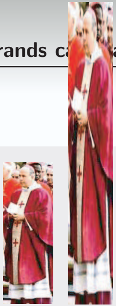
- **Un** (vieux) **résultat : en pratique, le système ZF est complet pour les ensembles finis.**

- **Quels nouveaux axiomes ?**

- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« **détermination projective** » (DP), ...



- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**
  ... parce ce que des théorèmes le disent.

- **Un (vieux) résultat : en pratique, le système ZF est complet pour les ensembles finis.**


Hugh Woodin

- **(Martin–Steel, Woodin, 1985)**

- Quels nouveaux axiomes ?

- Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« détermination projective » (DP), ...

- Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?
  ... parce ce que des théorèmes le disent.

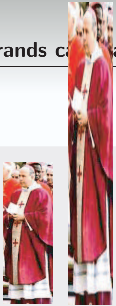
- Un (vieux) résultat : en pratique, le système ZF est complet pour les ensembles finis.

Hugh Woodin

- (Martin–Steel, Woodin, 1985)
En pratique, le système ZF+DP est complet pour les ensembles finis et dénombrables .

↑
infinis de taille $\aleph_0$ (celle de $\mathbb{N}$)

- **Quels nouveaux axiomes ?**



- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« **détermination projective** » (DP), ...

- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**

... parce ce que des théorèmes le disent.

- **Un (vieux) résultat : en pratique, le système ZF est complet pour les ensembles finis.**

Hugh Woodin

- **(Martin–Steel, Woodin, 1985)**
En pratique, le système $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ est complet pour les ensembles finis et dénombrables (et il donne la bonne description) .

↑
infinis de taille $\aleph_0$ (celle de $\mathbb{N}$)

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF{+}DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme **vrai** ($=$ objet de consensus)

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

  L'axiome DP est maintenant considéré comme **vrai** (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ?

- **(2000) Nouveau consensus : $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ comme base de la théorie des ensembles.**

L'axiome DP est maintenant considéré comme vrai ($=$ objet de consensus)

- **Quid de l'hypothèse du continu ?** prouvée par $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$?

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF{+}DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme **vrai** (= objet de consensus)

- **Quid de l'hypothèse du continu ?** prouvée par $\mathrm{ZF{+}DP}$? réfutée par $\mathrm{ZF{+}DP}$?

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF+DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

  L'axiome DP est maintenant considéré comme **vrai** (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par $\mathrm{ZF+DP}$? réfutée par $\mathrm{ZF+DP}$?
  Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...

- (2000) **Nouveau consensus** : ZF+DP comme base de la théorie des ensembles.

  L'axiome DP est maintenant considéré comme vrai (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par ZF+DP ? réfutée par ZF+DP ?
  Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...
  $\rightsquigarrow$ Il faudra attendre l'étape suivante (taille $\aleph_1$).

- (2000) **Nouveau consensus** : $\mathrm{ZF+DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme **vrai** (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par $\mathrm{ZF+DP}$? réfutée par $\mathrm{ZF+DP}$?
  Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...
  $\rightsquigarrow$ Il faudra attendre l'étape suivante (taille $\aleph_1$).

- (Woodin, 2001) Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout système incluant $\mathrm{ZF+DP}$ et en pratique complet jusqu'à la taille $\aleph_1$ réfute l'hypothèse du continu.

- (2000) Nouveau consensus : $\mathrm{ZF}{+}\mathrm{DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme vrai (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par $\mathrm{ZF}{+}\mathrm{DP}$? réfutée par $\mathrm{ZF}{+}\mathrm{DP}$?
  Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...

$\rightsquigarrow$ Il faudra attendre l'étape suivante (taille $\aleph_1$).

- (Woodin, 2001) Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout système incluant $\mathrm{ZF}{+}\mathrm{DP}$ et en pratique complet jusqu'à la taille $\aleph_1$ réfute l'hypothèse du continu.

- Aujourd'hui, le problème reste ouvert, mais, un jour, il y aura une solution

- (2000) Nouveau consensus : $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme vrai (= objet de consensus)

- Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$? réfutée par $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$?
  Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...

$\rightsquigarrow$ Il faudra attendre l'étape suivante (taille $\aleph_1$).

- (Woodin, 2001) Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout système incluant $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$ et en pratique complet jusqu'à la taille $\aleph_1$ réfute l'hypothèse du continu.

- Aujourd'hui, le problème reste ouvert, mais, un jour, il y aura une solution

(Et, en dépit de ce qui précède, Woodin prédit qu'elle sera positive.)

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication,**

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2				
3				
4				

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3				
4				

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4				

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$			
$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$			
$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$			
$\mathbf{4}$	$\mathbf{1}$			

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1)$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1)$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**

- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?

- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1)$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1)$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?

- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$
\begin{aligned}
&4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
&4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
&4 * 4
\end{aligned}
$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1)
\end{aligned}$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$
\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1)
\end{aligned}
$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?

- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$
$$4 * 4 = 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$
$$4 * 4 = 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$
$$4 * 4 = 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4		
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2			
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,$$
$$4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,$$
$$4 * 4 = 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,$$
$$3 * 2 = 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4,\ldots$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- À quoi sert l'ultra-infini ?
- Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :

$*$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$
\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}
$$

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**
- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne, et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:**

$$\begin{aligned}
4 * 2 = 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 = 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 = 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 = 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- **La construction marche de la même façon pour toutes les puissances de 2.**

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**

- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4,\ldots
\end{aligned}$$

- **La construction marche de la même façon pour toutes les puissances de 2.**
  $\rightsquigarrow$ la table de Laver à $1, 2, 4, 8, 16, 32,\ldots$ éléments.

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à 1 élément :

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à 1 élément : 1

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à 1 élément : 1 1 valeur

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à $\mathbf{1}$ élément : $\mathbf{1}$ — $\mathbf{1}$ valeur
  - table à $\mathbf{2}$ éléments :

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à $\mathbf{1}$ élément : $\mathbf{1}$ $\mathbf{1}$ valeur
  - table à $\mathbf{2}$ éléments : $\mathbf{2}$, 2

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à 1 élément : 1 — 1 valeur
  - table à 2 éléments : 2, 2 — 1 valeur

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à $\mathbf{1}$ élément : $\mathbf{1}$ — $\mathbf{1}$ valeur
  - table à $\mathbf{2}$ éléments : $\mathbf{2}$, 2 — $\mathbf{1}$ valeur
  - table à $\mathbf{4}$ éléments :

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

  - table à **1** élément : **1** — **1 valeur**
  - table à **2** éléments : **2**, 2 — **1 valeur**
  - table à **4** éléments : **2**, **4**, 2, 4

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à $\mathbf{1}$ élément :	$\mathbf{1}$	**1 valeur**
- table à $\mathbf{2}$ éléments :	$\mathbf{2}$, 2	**1 valeur**
- table à $\mathbf{4}$ éléments :	$\mathbf{2}$, $\mathbf{4}$, 2, 4	**2 valeurs**

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à **1** élément :	**1**	**1** valeur
- table à **2** éléments :	**2**, 2	**1** valeur
- table à **4** éléments :	**2**, **4**, 2, 4	**2** valeurs
- table à **8** éléments :	**2**, **4**, **6**, **8**, 2, 4, 6, 8	**4** valeurs
- table à **16** éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à **1** élément :	**1**	**1** valeur
- table à **2** éléments :	**2**, 2	**1** valeur
- table à **4** éléments :	**2**, **4**, 2, 4	**2** valeurs
- table à **8** éléments :	**2**, **4**, **6**, **8**, 2, 4, 6, 8	**4** valeurs
- table à **16** éléments :	**2**, **12**, **14**, **16**, 2, 12, 14, 16, 2, ...	**4** valeurs
- table à **32** éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	**1**	**1** valeur
- table à 2 éléments :	**2**, 2	**1** valeur
- table à 4 éléments :	**2**, **4**, 2, 4	**2** valeurs
- table à 8 éléments :	**2**, **4**, **6**, **8**, 2, 4, 6, 8	**4** valeurs
- table à 16 éléments :	**2**, **12**, **14**, **16**, 2, 12, 14, 16, 2, ...	**4** valeurs
- table à 32 éléments :	**2**, **12**, **14**, **16**, **18**, **28**, **30**, **32**, 2, ...	**8** valeurs

- **Question :** **Combien de valeurs** **dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	**1**	**1 valeur**
- table à 2 éléments :	**2**, 2	**1 valeur**
- table à 4 éléments :	**2, 4**, 2, 4	**2 valeurs**
- table à 8 éléments :	**2, 4, 6, 8**, 2, 4, 6, 8	**4 valeurs**
- table à 16 éléments :	**2, 12, 14, 16**, 2, 12, 14, 16, 2, ...	**4 valeurs**
- table à 32 éléments :	**2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32**, 2, ...	**8 valeurs**
- table à 64 éléments :	**2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64**, 2, ...	

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :		

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	16 valeurs

- **Question :** **Combien de valeurs** dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	16 valeurs

Richard Laver

- **Théorème** (Laver, 1994)

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à	1 élément :	1	1 valeur
- table à	2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à	4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à	8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à	16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à	32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à	64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à	128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à	256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à	512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	16 valeurs

Richard Laver

- **Théorème (Laver, 1994)**
  le nombre de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments tend vers l'infini avec n.

- **Question : Combien de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?**

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	16 valeurs

Richard Laver

- **Théorème (Laver, 1994)** S'il existe un cardinal de Laver, le nombre de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments tend vers l'infini avec n.

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**

  – **On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver**

  (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF+DP}$).

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**

  – **On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver**

  (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).

  – **On sait construire « à la main » les tables de Laver,**

  mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).
  - On sait construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**

  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...

  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**

  – On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver

  (à partir de ZF ou même de ZF+DP).

  – On sait construire « à la main » les tables de Laver,

  mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.

  – Pourra-t-on le faire un jour ?

  – Probablement...

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - **On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver**
    (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).
  - **On sait construire « à la main » les tables de Laver,**
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - **Pourra-t-on le faire un jour ?**
    - **Probablement...**
      - **Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?**

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).
  - On sait construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - Probablement...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - Si : sans ultra-infini, on n'aurait pas découvert les tables de Laver.

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de ZF+DP).
  - On sait construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - Probablement...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - Si : sans ultra-infini, on n'aurait pas découvert les tables de Laver.

« L'ultra-infini donne de (bonnes) idées. »

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre $\mathcal{A}$...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de ZF+DP).
  - On sait construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - Probablement...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - Si : sans ultra-infini, on n'aurait pas découvert les tables de Laver.

« L'ultra-infini donne de (bonnes) idées. »

- **Penser à la physique :**

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On ne peut pas démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de ZF+DP).
  - On sait construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on ne sait pas démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - Probablement...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - Si : sans ultra-infini, on n'aurait pas découvert les tables de Laver.

« L'ultra-infini donne de (bonnes) idées. »

- **Penser à la physique : utiliser une intuition de théorie des ensembles** (ultra-infini) **pour deviner des propriétés** (puis, éventuellement, les démontrer sans)

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On **ne peut pas** démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).
  - On **sait** construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on **ne sait pas** démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - **Probablement**...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - **Si** : sans ultra-infini, on n'aurait pas **découvert** les tables de Laver.

« L'ultra-infini donne de (bonnes) idées. »

- **Penser à la physique : utiliser une intuition de théorie des ensembles** (ultra-infini) **pour deviner des propriétés** (puis, éventuellement, les démontrer sans)
  $\approx$ **utiliser une intuition physique pour deviner des propriétés.**

- **La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).**

- **La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).**

- **Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.**

• La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

• Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

• La théorie des ensembles continue de progresser :

• La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

• Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

• La théorie des ensembles continue de progresser :
il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en $\mathrm{ZF+DP}$,

- La **théorie des ensembles** est la théorie de **l'infini** : son but est d'explorer **les** divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, **sur un malentendu**, on a voulu en faire une théorie **du grand tout**, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles **continue de progresser** :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système $\mathbf{ZF}$ en $\mathbf{ZF}+\mathbf{DP}$,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer
 les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
 il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
 il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
 et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
 il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en $\mathsf{ZF}+\mathsf{DP}$,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
  – pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
  – pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?
  – pourquoi les humains croient-ils à l'infini,

• La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

• Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

• La théorie des ensembles continue de progresser :
il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

• Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

• Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
– pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?
– pourquoi les humains croient-ils à l'infini,
ou, en tout cas, en partagent l'intuition ?

• La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

• Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

• La théorie des ensembles continue de progresser :
il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

• Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

• Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
– pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?
– pourquoi les humains croient-ils à l'infini,
ou, en tout cas, en partagent l'intuition ?

• Une vraie question : Les Martiens ont-ils l'intuition de l'infini ?

- **La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis** (et rien de plus).

- **Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.**

- **La théorie des ensembles continue de progresser :**
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- **Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,**
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- **Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :**
  – **pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?**
  – **pourquoi les humains croient-ils à l'infini,**
  ou, en tout cas, en partagent l'intuition ?

- **Une vraie question : Les Martiens ont-ils l'intuition de l'infini ?**
  L'utilisent-ils dans leurs mathématiques ?

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
  – pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?
  – pourquoi les humains croient-ils à l'infini,
  ou, en tout cas, en partagent l'intuition ?

- Une vraie question : Les Martiens ont-ils l'intuition de l'infini ?
  L'utilisent-ils dans leurs mathématiques ?

www.math.unicaen.fr/~dehornoy/