Il était une fois la théorie des ensembles...

...l'histoire d'un (ou deux) malentendu(s)

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques
Nicolas Oresme, Université de Caen

- Comment une magnifique théorie scientifique a pu mener à la catastrophe (?) des « maths modernes » : ce qu'est — et n'est pas — la théorie des ensembles.
- Une promenade de 140 ans en compagnie de grands génies des mathématiques...

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. Et aujourd'hui ?

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. Et aujourd'hui ?

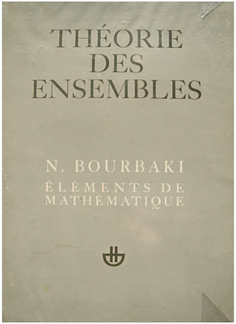
André Lichnerowicz

- **1967–1973 : Commission Lichnerowicz**
- **Réforme pour**

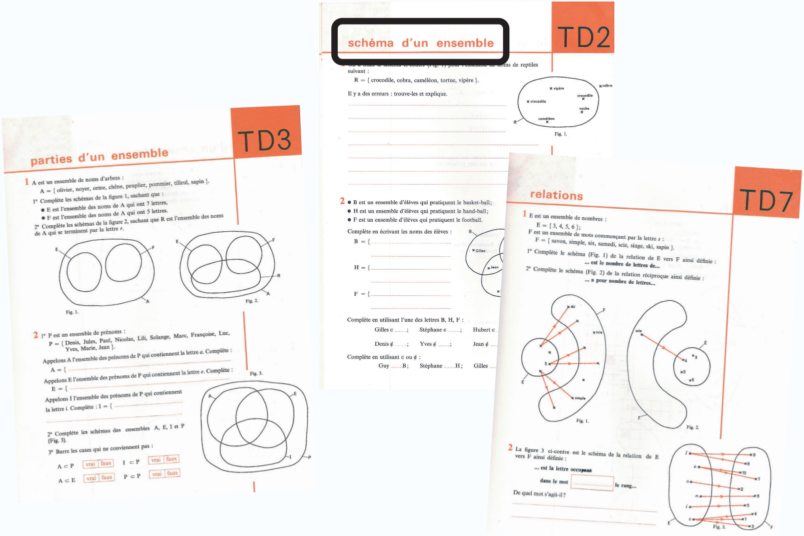
  « *moderniser l'enseignement des mathématiques*
  à l'école primaire, au collège et au lycée,
  en insistant sur les structures mathématiques »

- **Fondée sur la théorie des ensembles,**
  et le traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki

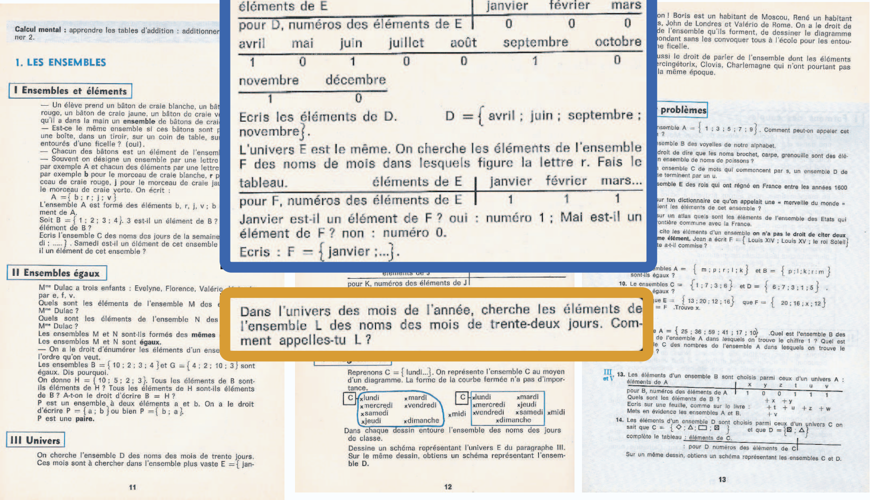
le groupe Bourbaki



- La réforme : plus de nombres, plus d'addition ou de multiplication, plus de géométrie... des **ensembles** et des **relations** !



- Personne ne savai[…]les de résultats...



vier ; février ; ...décembre} qu'on appelle **univers**. Comment marquer les éléments de D ?

en convenant de leur attribuer le numéro 1 ; le numéro 0 est attribué aux autres éléments.

éléments de E	janvier	février	mars
pour D, numéros des éléments de E	0	0	0

avril	mai	juin	juillet	août	septembre	octobre
1	0	1	0	0	1	0

novembre	décembre
1	0

Ecris les éléments de D. D = { avril ; juin ; septembre ; novembre }.

L'univers E est le même. On cherche les éléments de l'ensemble F des noms de mois dans lesquels figure la lettre r. Fais le tableau.

éléments de E	janvier	février	mars...
pour F, numéros des éléments de E	1	1	1

Janvier est-il un élément de F ? oui : numéro 1 ; Mai est-il un élément de F ? non : numéro 0.

Ecris : F = { janvier ;...}.

Dans l'univers des mois de l'année, cherche les éléments de l'ensemble L des noms des mois de trente-deux jours. Comment appelles-tu L ?

Calcul mental : apprendre les tables d'addition : additionner[…] ner 2.

1. LES ENSEMBLES

I Ensembles et éléments

II Ensembles égaux

III Univers

On cherche l'ensemble D des noms des mois de trente jours. Ces mois sont à chercher dans l'ensemble plus vaste E = { jan-

11

Dans chaque dessin entoure l'ensemble des noms des jours de classe.

Dessine un schéma représentant l'univers E du paragraphe III. Sur le même dessin, obtiens un schéma représentant l'ensemble D.

12

problèmes

Sur un même dessin, obtiens un schéma représentant les ensembles C et D.

13

D'autres exercices bizarres...

Symboles - Égalités

3

Le signe 3 est un symbole employé pour désigner le **nombre** d'objets de l'ensemble.

Le symbole △ désigne la **forme** des objets de l'ensemble.

3 + 2

5

3 + 2 = 5

3 + 2 et 5 désignent le même nombre.

= rouge

On place le signe = entre deux symboles désignant la même chose.

B

a

a est un symbole qui désigne le point marqué en noir.

B est un symbole qui désigne la ligne tracée en rouge.

6 est le symbole qui désigne ce coureur.

A l'école, chaque élève dispose d'une étiquette avec son prénom et son nom.

Jean DUPUY est un symbole qui désigne un élève.

n

On peut désigner un nombre par une lettre. Si on désigne par n le nombre d'objets de cet ensemble on peut écrire

n = 4

3

• 1. Dessine q... des couleurs. ... égalité. Recom... pour désigner

• 2. Quelle es... de cette étiqu... Complète l'ég... écrite en lettre...

Ecris de même des symboles

• 3. Ce symbole concerne la couleur : désigne-t-il une couleur? Pourquoi?

• 4. Une boîte contient 7 jetons bleus et 5 jetons rouges. Dans quel but peut-on employer ce symbole?

Que désigne-t-il aussi dans le cas des jetons de cette boîte?
Fais un dessin des jetons en utilisant le symbole précédent et d'autres symboles dans le schéma. Peux-tu écrire une égalité?

• 5. = rond

Que penses-tu de cette égalité? Elle peut être vraie, si on ne considère que certains objets : dessine un tel ensemble d'objets, en utilisant les symboles précédents dans le schéma.

• 6. Complète chaque égalité avec le symbole convenable.

bleu = ... non vert = ...
non carré = ... = ...

• 7. Dessine un objet ayant la propriété représentée par ce symbole.

Recommence avec chacun des deux autres non

4

Complète l'égalité :

non = ...

• 8. Complète les égalités

non = ...

non = ...

• 10. carré

Des deux symboles qui désignent la même forme, lequel te paraît le plus

• 11.

Francis a dessiné une étiquette pour désigner la propriété des objets entourés d'un trait rouge : quelle est la signification de cette étiquette? Si l'on ne voyait pas les objets pourrait-on comprendre facilement la signification de l'étiquette? Pourquoi?
Dessine une autre étiquette pour l'ensemble des objets entourés d'un trait noir : quelle doit être sa signification?

• 12. Essaie de dessiner deux symboles ... mince, épais.

• 13. Indique la signification de chacune des étiquettes.

Dessine une 3e étiquette du même genre et indique ce qu'elle signifie.

Le casse-tête des parents

« *Si vous ne voulez pas perdre la face, parents, ce livre est fait pour vous, car vous devez d'abord comprendre la véritable nature des mathématiques modernes.* »

- **Même réforme et mêmes problèmes dans d'autres pays : « New Math » aux USA**

- **Après 1980 : abandon progressif des « maths modernes » dans l'enseignement**

  (1983 : retour de la géométrie dans les programmes des lycées)

- **Aujourd'hui, les « maths modernes » sont bien oubliées... mais**

Comment en est-on arrivé à ce gâchis ?
Et, à propos, la théorie des ensembles, qu'est-ce que c'est ?

Plan :

- **La théorie des ensembles, c'est une théorie de l'infini.**

- **Depuis l'Antiquité, l'idée de l'infini est là avec la suite sans fin des entiers $0, 1, 2\ldots$ mais c'est une limite inatteignable, pas un objet d'étude mathématique.**

Georg Cantor

- **Et puis Cantor est arrivé...**
- **1872 : correspondance avec Richard Dedekind sur la question de la numérotabilité**
- **7 décembre 1873 : lettre à Dedekind...**
  « *L'infini des nombres entiers n'est pas celui des nombres réels.* »

Richard Dedekind

La théorie des ensembles est née...

- **De quoi parle Cantor ?**

  De la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble (infini).

- **On peut numéroter les entiers relatifs :**

...	6	4	2	0	1	3	5	7	...
...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...

- **On peut numéroter les nombres rationnels (positifs) :**

0 $\frac{1}{1}$	1 $\frac{2}{1}$	3 $\frac{3}{1}$	6 $\frac{4}{1}$	10 $\frac{5}{1}$	...
2 $\frac{1}{2}$	4 $\frac{2}{2}$	7 $\frac{3}{2}$	11 $\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
5 $\frac{1}{3}$	8 $\frac{2}{3}$	12 $\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
9 $\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	...
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...

⇝ Pourrait-on numéroter **tous** les ensembles infinis ?

- (Cantor) On peut numéroter les nombres algébriques.

↑

les nombres réels racines d'une équation

(en particulier) tous les réels qui s'écrivent avec avec $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, etc.

- **Théorème (Cantor) : On ne peut pas numéroter les nombres réels.**

- Démonstration : Soient $x_0, x_1, \ldots$ des réels quelconques ; on va exhiber un réel x différent de chacun des x_n. Pour chaque n, on écrit le développement décimal de x_n

(s'il y a ambiguïté, on choisit celui qui ne se termine pas par $999\ldots$) :

$$\begin{aligned} x_0 &= \ldots,\ c_{0,0}\ \ c_{0,1}\ \ c_{0,2}\ \ \ldots \\ x_1 &= \ldots,\ c_{1,0}\ \ c_{1,1}\ \ c_{1,2}\ \ \ldots \\ x_2 &= \ldots,\ c_{2,0}\ \ c_{2,1}\ \ c_{2,2}\ \ \ldots \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Considérons le réel

$$x = \ 0,\ c^{\#}_{0,0}\ \ c^{\#}_{1,1}\ \ c^{\#}_{2,2}\ \ \ldots$$

où on a posé $0^{\#} = 1$, et $1^{\#} = 2^{\#} = \ldots = 9^{\#} = 0$. Alors on a $x \neq x_n$ pour tout n.$\square$

- Si on démontre qu'il y a (au moins) deux infinis différents... c'est que l'infini est objet de démonstration, et donc qu'il est accessible aux mathématiques.

- Avant Cantor, l'infini était une notion de philosophie, pas de mathématiques.
  Avec Cantor, l'infini devient objet de démonstration, donc d'exploration.
  (comme les nombres entiers ou la géométrie)

- 1875–1885 : Cantor explore le monde de l'infini, en utilisant comme outils les ensembles et les ordinaux transfinis :

↑
compter au-delà du fini
avec le principe « il existe un plus petit qui... »

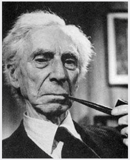
$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega\cdot 3, \ldots, \omega\cdot\omega = \omega^2,$$

$$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots, \omega^{\omega^2}, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots \text{ etc.}$$

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. **Le temps des malentendus (1900–1970)**
3. Et aujourd'hui ?

- **Un problème mal** (incomplètement) **posé : qu'est-ce qu'un ensemble ?**
- **(Cantor) :** « *n'importe quelle collection d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés* »



Bertrand Russell

- **Paradoxe (Russell) :** Il y a des problèmes avec la « définition » de Cantor :

L'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \notin \mathrm{X}\}$ **n'existe pas,** car sinon on aurait
ou bien $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, donc est impossible,
ou bien $\mathrm{E} \notin \mathrm{E}$, qui entraîne $\mathrm{E} \in \mathrm{E}$, donc est impossible.

- **Ce qui compte, ce n'est pas ce que sont les ensembles, mais comment ils fonctionnent : fixer les règles du jeu** (axiomes)**.**

Ernst Zermelo

- **1908 : système de Zermelo**
- **1922 : système de Zermelo-Fraenkel ZF**

↑

objet d'un **consensus** :
« oui, les ensembles, ça fonctionne comme cela »...

- **Début XXe siècle : « crise des fondements » :**
  les mathématiques sont-elles contradictoires ?

- **Programme de Hilbert : avec des bases axiomatiques suffisamment rigoureuses, on devrait pouvoir montrer que les mathématiques sont sans contradiction.**

David Hilbert

John von Neumann

- **Une piste (?) : on peut représenter par des ensembles des objets (qui n'en sont pas).**

On peut représenter les nombres entiers par des ensembles :

- **représenter le nombre 0 par l'ensemble vide $\emptyset$,**
- **représenter le nombre 1 par l'ensemble $\{\emptyset\}$,**
- **représenter le nombre 2 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,**
- **représenter le nombre 3 par l'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.,**

...et ces ensembles se comportent comme les entiers.

De même pour les autres objets mathématiques :

- **représenter un couple (x, y) par l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$,**
- **représenter une fonction f par l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{Dom}(f)\}$, etc.**

- **Toutes les mathématiques peuvent se représenter dans le monde des ensembles !**

⇝ Pour montrer que les mathématiques sont sans contradiction, il suffit de montrer que la théorie des ensembles est sans contradiction.

- **Années 30 : chiche !**
- **Nicolas Bourbaki, traité complet de mathématiques basé sur la théorie des ensembles.**
- **Un travail colossal et admirable**

- **Une option hardie : puisqu'on a le choix** (on repart du début) **et qu'on peut tout représenter comme ensemble, proclamons** **Tout est ensemble !**
  les nombres sont des ensembles, les fonctions sont des ensembles,... etc.

- **Bien sûr, cela marche très bien** (aucun risque technique...)
  ...et ce succès inspire les pédagogues :
- **Puisque tout est ensemble, il faut mettre les ensembles à la base de l'enseignement :**

« *Le Professeur Dieudonné lance le cri de guerre de la nouvelle croisade : "À bas Euclide !"* »

...Et vive la réforme des « maths modernes » !


Jean Dieudonné


Kurt Gödel

- Hélas on avait oublié deux choses...

- 1931 : Théorèmes d'incomplétude : Il est impossible de montrer que la théorie des ensembles n'est pas contradictoire.

  $\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles n'aidera pas à montrer que les mathématiques ne sont pas contradictoires

- Et puis (surtout), le malentendu majeur : la théorie des ensembles ne dit pas que tous les objets mathématiques sont des ensembles, mais (seulement) qu'on peut les représenter comme tels...

- Dès les années 1940, d'autres représentations des objets mathématiques existent, par exemple le lambda-calcul de Church (« tout est fonction »),

  comme ensemble : 3 est représenté par $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
  comme fonction : 3 est représenté par $\lambda f\, \lambda x\, f(f(f(x)))$,...

  puis la théorie des catégories (« tout est diagramme »), etc.


Alonzo Church

$\rightsquigarrow$ fonder tout sur les ensembles ne peut être qu'une option technique, rien d'autre.

Il n'y a(vait) donc aucune raison de fonder l'enseignement sur les ensembles...

- Pourquoi Bourbaki n'a-t-il pas compris l'importance des résultats de Gödel ?
  (et fondé son traité sur les ensembles quand ceux-ci perdaient leur intérêt)
  Pourquoi ces résultats sont-ils restés ignorés dans les années 1950 ?

- Parce que ces résultats étaient (et restent) difficiles,
  Parce que les fondements n'intéressaient pas vraiment Bourbaki.

- Parce que la mode était aux structures abstraites et aux idéologies dogmatiques : les mathématiciens savaient (peut-être) ce qu'ils faisaient, mais leurs épigones et suiveurs non !

Une convention technique commode (« tout est ensemble »)
n'est pas la vérité révélée d'une nouvelle religion.

- De surcroît : problème de formation des enseignants (et pour cause...)

⇝ L'échec et le rejet étaient (probablement) inévitables.

Plan :

0. Une réforme déroutante
1. Le temps des pionniers (1873–1900)
2. Le temps des malentendus (1900–1970)
3. **Et aujourd'hui ?**

- Back to… les débuts. Cantor a montré qu'il y a au moins deux infinis distincts
  celui des nombres entiers ($\mathbb{N}$), et celui des nombres réels ($\mathbb{R}$) ; il a montré plus :

- (Cantor) Il existe une infinité d'infinis, qui s'organisent en une suite
  $$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots$$

- Le cardinal (la taille) de $\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, donc c'est $\aleph_0$.
  Le cardinal (la taille) de $\mathbb{R}$ est strictement plus grand, donc ce n'est pas $\aleph_0$.

- (Cantor) « Problème du continu »: quel $\aleph_\alpha$ est le cardinal de $\mathbb{R}$?

Est-ce $\aleph_1$? ou $\aleph_2$? ou un autre $\aleph_\alpha$?

- Cantor pensait que la réponse était $\aleph_1$ (« hypothèse du continu »).

- (1900, Hilbert) Le problème du continu est le numéro 1
  sur la liste des 23 problèmes pour le XXe siècle.

- (1920's) Consensus sur le système de Zermelo–Fraenkel ZF comme point de départ de la théorie des ensembles.
  - ⇝ Première question : L'hypothèse du continu est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

Kurt Gödel

- (Gödel, 1938) Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas réfutable à partir de ZF.

Paul Cohen

- (Cohen, 1963) Sauf si ZF est contradictoire, l'hypothèse du continu n'est pas prouvable à partir de ZF.

- Quelle est la signification des théorèmes de Gödel et Cohen ?
  ⇝ Le problème du continu est-il résolu ? Non.
  est-il dépourvu de sens ? Non.
  est-il indécidable, ni vrai, ni faux ? Non et non !

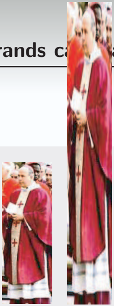
- Les théorèmes de Gödel et Cohen disent que le système ZF est incomplet :
  (... et depuis les théorèmes d'incomplétude, ce n'est pas un scoop !)
  - le système ZF n'épuise pas les propriétés des ensembles,
  - il reste des propriétés de base à découvrir.

- Un système d'axiomes, ça ne se démontre pas, c'est l'objet d'un consensus :

> « Aujourd'hui (en 1922), nous sommes d'accord pour déclarer que
> le système ZF représente correctement notre intuition des ensembles ».

- Aujourdui, 90 ans après ZF, en savons-nous plus,
  et un consensus pour un nouveau système a-t-il émergé ? Oui !

- **Quels nouveaux axiomes ?**



- **Axiomes de grands cardinaux : affirment l'existence d'ensembles « ultra-infinis » = des solutions à l'équation**

$$\frac{\text{ultra-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}.$$

« cardinaux inaccessibles », « cardinaux mesurables »,
« **détermination projective** » (DP), ...

- **Pourquoi penser qu'un axiome de grand cardinal est vrai ?**
... parce ce que des théorèmes le disent.

- **Un (vieux) résultat : en pratique, le système ZF est complet pour les ensembles finis.**

Hugh Woodin

- **(Martin–Steel, Woodin, 1985)**
En pratique, le système ZF+DP est complet pour les ensembles finis et dénombrables (et il donne la bonne description).

↑
infinis de taille $\aleph_0$ (celle de $\mathbb{N}$)

• (2000) Nouveau consensus : ZF+DP comme base de la théorie des ensembles.

L'axiome DP est maintenant considéré comme vrai (= objet de consensus)

• Quid de l'hypothèse du continu ? prouvée par ZF+DP ? réfutée par ZF+DP ?
Ni l'un, ni l'autre, comme pour ZF...

$\rightsquigarrow$ Il faudra attendre l'étape suivante (taille $\aleph_1$).

• (Woodin, 2001) Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout système incluant ZF+DP et en pratique complet jusqu'à la taille $\aleph_1$ réfute l'hypothèse du continu.

• Aujourd'hui, le problème reste ouvert, mais, un jour, il y aura une solution

(Et, en dépit de ce qui précède, Woodin prédit qu'elle sera positive.)

- **À quoi sert l'ultra-infini ?**

- **Une drôle de table de multiplication, la table de Laver à 4 éléments :**

$*$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- **Commencer avec $+1$ modulo 4 dans la 1ère colonne,**
  et compléter avec la règle $x * (y * 1) = (x * y) * (x * 1)$:

$$
\begin{aligned}
4 * 2 &= 4 * (1 * 1) = (4 * 1) * (4 * 1) = 1 * 1 = 2,\\
4 * 3 &= 4 * (2 * 1) = (4 * 2) * (4 * 1) = 2 * 1 = 3,\\
4 * 4 &= 4 * (3 * 1) = (4 * 3) * (4 * 1) = 3 * 1 = 4,\\
3 * 2 &= 3 * (1 * 1) = (3 * 1) * (3 * 1) = 4 * 4 = 4, \ldots
\end{aligned}
$$

- **La construction marche de la même façon pour toutes les puissances de 2.**
  $\rightsquigarrow$ la table de Laver à $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ éléments.

- **Question :** **Combien de valeurs** dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments ?

- table à 1 élément :	1	1 valeur
- table à 2 éléments :	2, 2	1 valeur
- table à 4 éléments :	2, 4, 2, 4	2 valeurs
- table à 8 éléments :	2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8	4 valeurs
- table à 16 éléments :	2, 12, 14, 16, 2, 12, 14, 16, 2, ...	4 valeurs
- table à 32 éléments :	2, 12, 14, 16, 18, 28, 30, 32, 2, ...	8 valeurs
- table à 64 éléments :	2, 12, 14, 48, 50, 60, 62, 64, 2, ...	8 valeurs
- table à 128 éléments :	2, 12, 14, 112, 114, 124, 126, 128, 2, ...	8 valeurs
- table à 256 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 2, ...	8 valeurs
- table à 512 éléments :	2, 12, 14, 240, 242, 252, 254, 256, 258, 268, 270, 496, 498, 508, 510, 512, 2,...	16 valeurs

Richard Laver

- **Théorème (Laver, 1994)** **S'il existe** un cardinal de Laver, le nombre de valeurs dans la 1ère ligne de la table à 2^n éléments tend vers l'infini avec n.

- **Quel est le rapport entre l'ultra-infini et les tables de Laver ?**
  Un certain ultra-infini (« cardinal de Laver ») mène à une algèbre A...
  ...dont les tables de Laver sont des quotients finis.

- **Une situation bizarre :**
  - On **ne peut pas** démontrer l'existence du cardinal de Laver
    (à partir de ZF ou même de $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}$).
  - On **sait** construire « à la main » les tables de Laver,
    mais on **ne sait pas** démontrer le théorème de Laver sans cardinal de Laver.
  - Pourra-t-on le faire un jour ?
    - **Probablement**...
      - Alors l'ultra-infini ne servira plus à rien ?
        - **Si** : sans ultra-infini, on n'aurait pas **découvert** les tables de Laver.

« L'ultra-infini donne de (bonnes) idées. »

- **Penser à la physique : utiliser une intuition de théorie des ensembles** (ultra-infini) **pour deviner des propriétés** (puis, éventuellement, les démontrer sans)
  $\approx$ **utiliser une intuition physique pour deviner des propriétés.**

- La théorie des ensembles est la théorie de l'infini : son but est d'explorer les divers infinis (et rien de plus).

- Elle a été victime de son succès : dans les années 1960, sur un malentendu, on a voulu en faire une théorie du grand tout, ce qui n'était pas sa prétention.

- La théorie des ensembles continue de progresser :
  il existe un consensus sur la façon de compléter le système ZF en ZF+DP,
  il devient réaliste d'espérer résoudre le problème du continu.

- Même si on ne s'intéresse qu'aux objets finis et aux résultats effectifs,
  et même si on ne croit pas à l'ultra-infini,
  il serait regrettable de se priver des intuitions qu'il apporte (tables de Laver...).

- Et, si vous restez sceptique sur l'existence de l'ultra-infini :
  – pourquoi croyez-vous aux nombres réels ?
  – pourquoi les humains croient-ils à l'infini,
  ou, en tout cas, en partagent l'intuition ?

- Une vraie question : Les Martiens ont-ils l'intuition de l'infini ?
  L'utilisent-ils dans leurs mathématiques ?

www.math.unicaen.fr/~dehornoy/