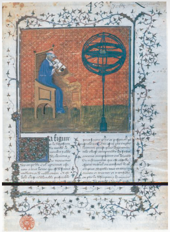
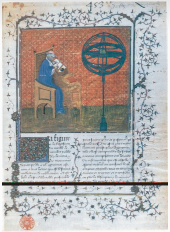
La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen



La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

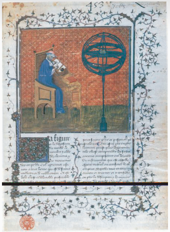


La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018



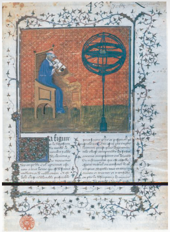
La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018

- Les résultats de Cohen ne sont pas la fin de l'Histoire.



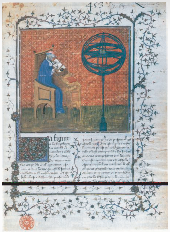
La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018

- Les résultats de Cohen ne sont pas la fin de l'Histoire.
- Aujourd'hui, on en sait (bien) plus sur (les ensembles et) l'infini,



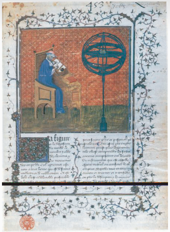
La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018

- Les résultats de Cohen ne sont pas la fin de l'Histoire.
- Aujourd'hui, on en sait (bien) plus sur (les ensembles et) l'infini,
  et il existe un espoir raisonnable que le problème du continu soit résolu.



La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018

- Les résultats de Cohen ne sont pas la fin de l'Histoire.
- Aujourd'hui, on en sait (bien) plus sur (les ensembles et) l'infini,
  et il existe un espoir raisonnable que le problème du continu soit résolu.
- De nouveaux types d'applications de la théorie des ensembles apparaissent.

Plan:

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen
- II. Que signifie découvrir de nouveaux axiomes vrais ?

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen
- II. Que signifie découvrir de nouveaux axiomes vrais ?
- III. Une application d'un type nouveau: les tables de Laver

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen
- II. Que signifie découvrir de nouveaux axiomes vrais ?
- III. Une application d'un type nouveau: les tables de Laver

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe* *au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe* *au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe* *une infinité d'infinis non équivalents,*

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe*
  au moins deux infinis non équivalents.

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe*
  une infinité d'infinis non équivalents,
  qui s'organisent en une suite bien ordonnée

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,

- <u>Théorème</u> (Cantor, 1873) : *Il existe <u>au moins deux</u> infinis non équivalents.*

- <u>Théorème</u> (Cantor, 1880's) : *Il existe <u>une infinité</u> d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots.$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R})$

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe*
  au moins deux infinis non équivalents.

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe*
  une infinité d'infinis non équivalents,
  qui s'organisent en une suite bien ordonnée

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe* *au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe* *une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots.$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe* *au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe* *une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Question (problème du continu) :

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Question (problème du continu) : Pour quel ordinal α a-t-on $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_\alpha$?

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots.$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Question (problème du continu) : Pour quel ordinal α a-t-on $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_\alpha$?

- Conjecture (hypothèse du continu, Cantor, 1879) :

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe* *au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe* *une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Question (problème du continu) : Pour quel ordinal α a-t-on $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_\alpha$?

- Conjecture (hypothèse du continu, Cantor, 1879) : $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.

- Théorème (Cantor, 1873) : *Il existe au moins deux infinis non équivalents.*

- Théorème (Cantor, 1880's) : *Il existe une infinité d'infinis non équivalents, qui s'organisent en une suite bien ordonnée*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \cdots .$$

- Faits. - $\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$,
  - $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathfrak{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0} > \mathrm{card}(\mathbb{N})$.

- Question (problème du continu) : Pour quel ordinal α a-t-on $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_\alpha$?

- Conjecture (hypothèse du continu, Cantor, 1879) : $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$.
  - Équivaut à : tout ensemble non dénombrable de réels est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient* HC.

$\uparrow$

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient* HC.

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient* HC.

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

… et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient* HC.

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient* HC.

... et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, ...)

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

↑
Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

... et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, ...)
  et axiomatisation de la théorie des ensembles (Zermelo, puis Fraenkel, ZF)

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

↑
Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

… et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, …) et axiomatisation de la théorie des ensembles (Zermelo, puis Fraenkel, ZF)
  - Consensus : ≪*Nous sommes d'accord que ces propriétés traduisent notre vision actuelle des ensembles*

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

↑

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

... et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, ...)
  et axiomatisation de la théorie des ensembles (Zermelo, puis Fraenkel, ZF)
  - Consensus : «*Nous sommes d'accord que ces propriétés traduisent notre vision actuelle des ensembles (mais cela peut changer dans le futur...)*».

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

... et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, ...) et axiomatisation de la théorie des ensembles (Zermelo, puis Fraenkel, ZF)
  - Consensus : « *Nous sommes d'accord que ces propriétés traduisent notre vision actuelle des ensembles (mais cela peut changer dans le futur...)* ».

- Première question :

- Théorème (Cantor–Bendixson, 1883) : *Les fermés vérifient HC.*

↑
Tout fermé non dénombrable est en bijection avec $\mathbb{R}$.

- Théorème (Alexandroff, 1916) : *Les boréliens vérifient HC.*

... et puis plus aucun progrès pendant 70 ans.

- Entre-temps, formalisation de la logique du premier ordre (Frege, Russell, ...)
  et axiomatisation de la théorie des ensembles (Zermelo, puis Fraenkel, ZF)
  - Consensus : « *Nous sommes d'accord que ces propriétés traduisent notre vision actuelle des ensembles (mais cela peut changer dans le futur...)* ».

- Première question : HC est-elle prouvable ou réfutable à partir de ZF ?

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si* ZF *est contradictoire,*

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si* ZF *est contradictoire,* HC *n'est pas réfutable à partir de* ZF*.*

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Cohen, 1963) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas prouvable à partir de ZF.*

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Cohen, 1963) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas prouvable à partir de ZF.*

- Conclusion :

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Cohen, 1963) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas prouvable à partir de ZF.*

- Conclusion : ZF est incomplet.

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Cohen, 1963) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas prouvable à partir de ZF.*

- Conclusion : ZF est incomplet.
  - Découvrir plus de propriétés de l'infini, et adopter plus d'axiomes !

- Théorème (Gödel, 1938) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas réfutable à partir de ZF.*

- Théorème (Cohen, 1963) : *Sauf si ZF est contradictoire, HC n'est pas prouvable à partir de ZF.*

- Conclusion : ZF est incomplet.
  - Découvrir plus de propriétés de l'infini, et adopter plus d'axiomes !
  - Comment reconnaître qu'un axiome est vrai? (Qu'est-ce que cela signifie ?)

- <u>Théorème</u> (Gödel, 1938) : *Sauf si* ZF *est contradictoire,* HC *n'est pas réfutable à partir de* ZF*.*

- <u>Théorème</u> (Cohen, 1963) : *Sauf si* ZF *est contradictoire,* HC *n'est pas prouvable à partir de* ZF*.*

- Conclusion : ZF est incomplet.
  - Découvrir plus de propriétés de l'infini, et adopter plus d'axiomes !
  - Comment reconnaître qu'un axiome est vrai? (Qu'est-ce que cela signifie ?)

Exemple: On <u>peut</u> prendre HC comme axiome, mais ce n'est <u>pas</u> une bonne idée...

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen
- II. Que signifie découvrir de nouveaux axiomes vrais ?
- III. Une application d'un type nouveau: les tables de Laver

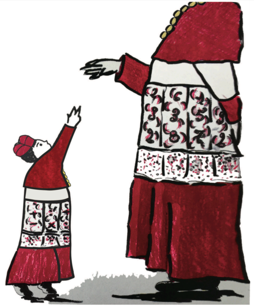
- Quels nouveaux axiomes ?

- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):

- Quels nouveaux axiomes ?

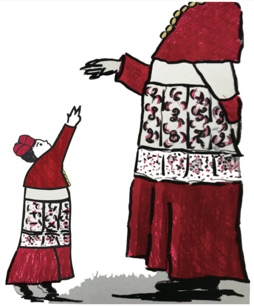
- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):



- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}}$$



- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

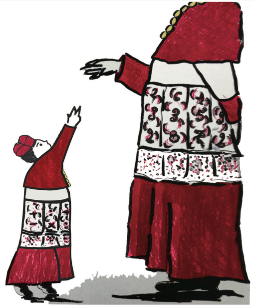
  - cardinaux inaccessibles,

- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.



- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

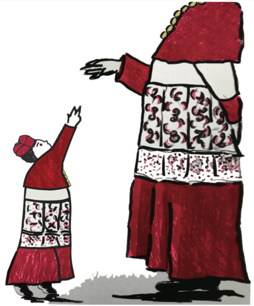
- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)



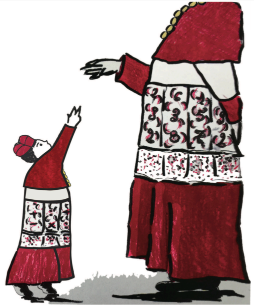
- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
    - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

    - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
    - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
    - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
    - X super-infini: $\exists j : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)



- Quels nouveaux axiomes ?

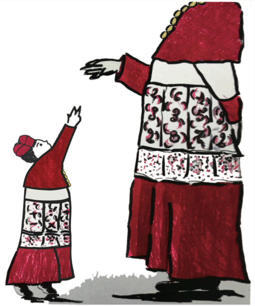
- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\exists j : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)

    $\uparrow$
    un plongement (élémentaire) sur X



- Quels nouveaux axiomes ?

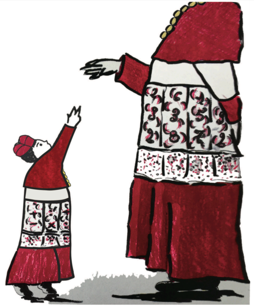
- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\exists j : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)

    ↑ un plongement (élémentaire) sur X
  - Exemple: Il ne peut exister aucun plongement sur $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ n'est pas super-infini.



- Quels nouveaux axiomes ?

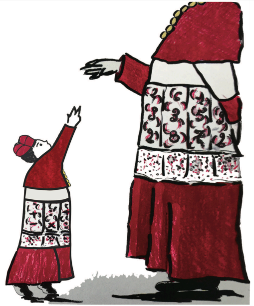
- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\underbrace{\exists j}_{\text{un plongement (élémentaire) sur } X} : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)
  - Exemple: Il ne peut exister aucun plongement sur $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ n'est pas super-infini.

- Les axiomes GC sont naturels



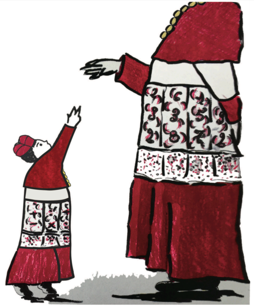
- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation
$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$
  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\exists j : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)

    $\uparrow$ un plongement (élémentaire) sur X
  - Exemple: Il ne peut exister aucun plongement sur $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ n'est pas super-infini.

- Les axiomes GC sont naturels (itération de l'existence d'un ensemble infini),

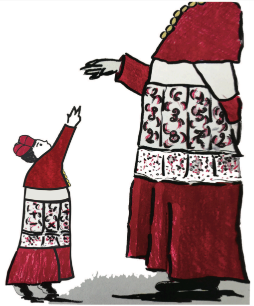


- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation
    $$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$
  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{un plongement (élémentaire) sur } X}}{\exists j} : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)
  - Exemple: Il ne peut exister aucun plongement sur $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ n'est pas super-infini.

- Les axiomes GC sont naturels (itération de l'existence d'un ensemble infini),
  mais aucune évidence qu'ils soient vrais, ou simplement utiles



- Quels nouveaux axiomes ?

- Depuis les années 1930, axiomes de grand cardinal (GC):
  - diverses solutions à l'équation

$$\frac{\text{super-infini}}{\text{infini}} = \frac{\text{infini}}{\text{fini}}$$

  - cardinaux inaccessibles, measurables, etc.
  - axiomes «il existe tel ou tel grand cardinal»...

- Principe: «autosimilaire implique grand»
  - X infini: $\exists j : X \to X$ (j injective non bijective)
  - X super-infini: $\underset{\uparrow}{\exists j} : X \to X$ (j inj. non bij. préservant toute notion $\in$-definissable)

    un plongement (élémentaire) sur X
  - Exemple: Il ne peut exister aucun plongement sur $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}$ n'est pas super-infini.

- Les axiomes GC sont naturels (itération de l'existence d'un ensemble infini), mais aucune évidence qu'ils soient vrais, ou simplement utiles

  (pas de lien avec les objets usuels).

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$,

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

  I
  II

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a_1 \\ \text{II} & \end{array}$$

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1	
II		a_2

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3
II		a_2	

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 \end{array}$$

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \ldots \end{array}$$

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & a_1 & & a_3 & & \dots & \\ \text{II} & & a_2 & & a_4 & & \dots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \dots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \dots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		$\dots$	
II		a_2		a_4		$\dots$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

- <u>Définition</u> : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \ldots \end{array}$$

et où I est déclaré <u>gagnant</u> si le réel $[0, a_1 a_2 \ldots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une <u>stratégie</u> gagnante dans G_A.

- Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \in A)$$

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccc} \text{I} & a_1 & & a_3 & & \dots & \\ \text{II} & & a_2 & & a_4 & & \dots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit **déterminé** si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

- Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}} \ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \notin A),$$

• <u>Définition</u> : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		...		
II		a_2		a_4		...	

et où I est déclaré <u>gagnant</u> si le réel $[0, a_1 a_2 ...]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une <u>stratégie</u> gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 ... ([0, a_1 a_2 ...]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}} \ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 ... ([0, a_1 a_2 ...]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés:

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \ldots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \ldots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \in A) \text{ ou } \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

• <u>Définition</u> : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		$\ldots$	
II		a_2		a_4		$\ldots$

et où I est déclaré <u>gagnant</u> si le réel $[0, a_1 a_2 \ldots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une <u>stratégie</u> gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}}\ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		$\dots$	
II		a_2		a_4		$\dots$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \in A) \text{ ou } \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

- Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \dots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \dots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

- Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}} \ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.
A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,
A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

- Toujours vrai pour les ensembles simples, et (faux) pour les ensembles compliqués:

• <u>Définition</u> : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \ldots \end{array}$$

et où I est déclaré <u>gagnant</u> si le réel $[0, a_1 a_2 \ldots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une <u>stratégie</u> gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}} \ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

• Toujours <u>vrai</u> pour les ensembles simples, et (<u>faux</u>) pour les ensembles compliqués:

- Tous les ouverts sont déterminés (Gale–Stewart, 1962),

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		...		
II		a_2		a_4		...	

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 ...]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 ... ([0, a_1 a_2 ...]_2 \in A) \text{ ou } \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 ... ([0, a_1 a_2 ...]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

• Toujours vrai pour les ensembles simples, et (faux) pour les ensembles compliqués:

- Tous les ouverts sont déterminés (Gale–Stewart, 1962),
- Tous les boréliens sont déterminés (Martin, 1975).

• <u>Définition</u> : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{I} & a_1 & & a_3 & & \ldots & \\ \mathrm{II} & & a_2 & & a_4 & & \ldots \end{array}$$

et où I est déclaré <u>gagnant</u> si le réel $[0, a_1 a_2 \ldots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une <u>stratégie</u> gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}} \ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \ldots ([0, a_1 a_2 \ldots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

• Toujours <u>vrai</u> pour les ensembles simples, et (<u>faux</u>) pour les ensembles compliqués:
- Tous les ouverts sont déterminés (Gale–Stewart, 1962),
- Tous les boréliens sont déterminés (Martin, 1975).
- «Tous les ensembles sont déterminés» contredit AC (Mycielski–Steinhaus, 1962),

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

I	a_1		a_3		$\dots$		
II		a_2		a_4		$\dots$	

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \in A) \text{ ou } \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

• Toujours vrai pour les ensembles simples, et (faux) pour les ensembles compliqués:

- Tous les ouverts sont déterminés (Gale–Stewart, 1962),
- Tous les boréliens sont déterminés (Martin, 1975).
- «Tous les ensembles sont déterminés» contredit AC (Mycielski–Steinhaus, 1962),
- «Tous les projectifs sont déterminés» non prouvable à partir de ZF ($\approx$ Gödel, 1938).

• Définition : Pour $A \subseteq \mathbb{R}$, on considère le jeu G_A où deux joueurs I et II jouent 0 ou 1

$$\begin{array}{llllllll} \text{I} & a_1 & & a_3 & & \dots & \\ \text{II} & & a_2 & & a_4 & & \dots \end{array}$$

et où I est déclaré gagnant si le réel $[0, a_1 a_2 \dots]_2$ est dans A.
Alors A est dit déterminé si un des deux joueurs a une stratégie gagnante dans G_A.

• Un énoncé infini d'un type spécial:

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \in A) \ \underline{\text{ou}}\ \forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \dots ([0, a_1 a_2 \dots]_2 \notin A),$$

et un modèle pour de nombreuses propriétés: il existe $C_{\mathcal{L}}, C_{\mathcal{B}} : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ t.q.

A est Lebesgue mesurable ssi $C_{\mathcal{L}}(A)$ est déterminé,

A a la propriété de Baire ssi $C_{\mathcal{B}}(A)$ est déterminé, etc.

• Toujours vrai pour les ensembles simples, et (faux) pour les ensembles compliqués:
- Tous les ouverts sont déterminés (Gale–Stewart, 1962),
- Tous les boréliens sont déterminés (Martin, 1975).
- «Tous les ensembles sont déterminés» contredit AC (Mycielski–Steinhaus, 1962),
- «Tous les projectifs sont déterminés» non prouvable à partir de ZF (≈ Gödel, 1938).

$\uparrow$ clôture des boréliens par projection et complément

• <u>Définition</u> : Axiome de détermination projective (DP) :

"Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) :

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

heuristiquement complète

- <u>Définition</u> : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- <u>Propositions</u> (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «<u>complète</u>» et <u>satisfaisante</u> des ensembles projectifs.*

$\uparrow$ heuristiquement complète $\uparrow$ pas de pathologie : Lebesgue mesurable, etc.

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

  heuristiquement complète pas de pathologie : Lebesgue mesurable, etc.

  - Exemple: Sous ZF+DP, les ensembles projectifs vérifient HC.

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

  heuristiquement complète pas de pathologie : Lebesgue mesurable, etc.

  - Exemple: Sous ZF+DP, les ensembles projectifs vérifient HC.

- L'axiome DP est utile (améliore la description des ensembles usuels),

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

  heuristiquement complète pas de pathologie : Lebesgue mesurable, etc.

  - Exemple: Sous ZF+DP, les ensembles projectifs vérifient HC.

- L'axiome DP est utile (améliore la description des ensembles usuels),
  mais pas naturel (pourquoi le considérer ?)

- Définition : Axiome de détermination projective (DP) :
  "Tout ensemble projectif de réels est déterminé".

- Propositions (Moschovakis, Kechris, ..., 1970s) : *Ajouté à* ZF,
  DP *fournit une description «complète» et satisfaisante des ensembles projectifs.*

  heuristiquement complète pas de pathologie : Lebesgue mesurable, etc.

  - Exemple: Sous ZF+DP, les ensembles projectifs vérifient HC.

- L'axiome DP est utile (améliore la description des ensembles usuels),
  mais pas naturel (pourquoi le considérer ?)
  — contrairement aux axiomes de grand cardinal, naturels mais non utiles.

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP*est un axiome de grand cardinal.*

↑
une infinité de cardinaux
de Woodin entraîne DP

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

$\uparrow$ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

$\uparrow$ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP*est un axiome de grand cardinal.*

↑ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

↑ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- <u>Corollaire</u> (Woodin) : DP *est vrai.*

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP*est un axiome de grand cardinal.*

↑ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

↑ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- <u>Corollaire</u> (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal),

- <u>Théorème</u> (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

$\uparrow$ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

$\uparrow$ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- <u>Corollaire</u> (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal), <u>et</u> utile (comme axiome de détermination). □

- Théorème (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- Corollaire (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal), et utile (comme axiome de détermination). □

- Pourquoi «vrai» ?

- Théorème (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

↑ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

↑ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- Corollaire (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal), et utile (comme axiome de détermination). □

- Pourquoi «vrai» ?
  - Comparer avec l'axiome d'infini :
    évidence = (?) intériorisation d'une longue familiarité et d'une efficacité pratique.

- Théorème (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

↑ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

↑ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- Corollaire (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal), et utile (comme axiome de détermination). □

- Pourquoi «vrai» ?
  - Comparer avec l'axiome d'infini : évidence = (?) intériorisation d'une longue familiarité et d'une efficacité pratique.
  - (Woodin) «*The statement that* DP *is consistent is a new mathematical truth. It predicts facts about our world, for instance that in the next 1000 years there will be no contradiction discovered from PD by any means.*»

- Théorème (Martin–Steel 1985, Woodin, 1987) : DP *est un axiome de grand cardinal.*

↑ une infinité de cardinaux de Woodin entraîne DP

↑ DP (entraîne) une infinité de cardinaux de Woodin

- Corollaire (Woodin) : DP *est vrai.*

«Démonstration» : DP est à la fois naturel (comme axiome de grand cardinal), et utile (comme axiome de détermination). □

- Pourquoi «vrai» ?
  - Comparer avec l'axiome d'infini : évidence = (?) intériorisation d'une longue familiarité et d'une efficacité pratique.
  - (Woodin) «*The statement that* DP *is consistent is a new mathematical truth. It predicts facts about our world, for instance that in the next 1000 years there will be no contradiction discovered from PD by any means.*»

- Nouveau consensus :

Le système de référence pour la théorie des ensembles n'est plus ZF, mais ZF+DP.

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP :

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis ($=$ cardinal$<\aleph_0$);

- Fait: Ni HC ni ¬HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis ($=$ cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables ($=$ cardinal$<\aleph_1$);

- Fait: Ni HC ni ¬HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis $(=\text{cardinal}<\aleph_0)$;
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables $(=\text{cardinal}<\aleph_1)$;
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis (= cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables (= cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

  ... inclura forcément une solution de HC.

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis ($=$ cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables ($=$ cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis ($=$ cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables ($=$ cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Approche maximaliste : axiomes de forcing (par ex. «axiome de Martin maximal»)

- Fait: Ni HC ni ¬HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis (= cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables (= cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?
    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Approche maximaliste : axiomes de forcing (par ex. «axiome de Martin maximal»)
  - $\approx$ principes de clôture algébrique (tout ce qui n'est pas exclu existe...) ;

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis ($=$ cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables ($=$ cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Approche maximaliste : axiomes de forcing (par ex. «axiome de Martin maximal»)
  - $\approx$ principes de clôture algébrique (tout ce qui n'est pas exclu existe...) ;
  - compatibles avec les grands cardinaux.

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis $(= \text{cardinal} < \aleph_0)$;
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables $(= \text{cardinal} < \aleph_1)$;
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?
    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Approche maximaliste : axiomes de forcing (par ex. «axiome de Martin maximal»)
  - $\approx$ principes de clôture algébrique (tout ce qui n'est pas exclu existe...) ;
  - compatibles avec les grands cardinaux.

- Théorème (Woodin, 2003) : *Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout axiome de forcing décrivant «complètement» les ensembles de cardinal $<\aleph_2$ implique $\neg$HC.*

- Fait: Ni HC ni $\neg$HC ne sont prouvables à partir de ZF+DP : rien n'est réglé...
  - avec ZF : description «complète» des ensembles finis (= cardinal$<\aleph_0$);
  - avec ZF+DP : description «complète» des ensembles finis ou dénombrables (= cardinal$<\aleph_1$);
  - étape suivante : description «complète» des ensembles de cardinal$<\aleph_2$?

    ... inclura forcément une solution de HC.

- Deux types d'approche (et pas encore de consensus...)

- Approche maximaliste : axiomes de forcing (par ex. «axiome de Martin maximal»)
  - $\approx$ principes de clôture algébrique (tout ce qui n'est pas exclu existe...) ;
  - compatibles avec les grands cardinaux.

- Théorème (Woodin, 2003) : *Si la Ω-conjecture forte est vraie, tout axiome de forcing décrivant «complètement» les ensembles de cardinal $<\aleph_2$ implique $\neg$HC.*
  - mais seulement envisageable pour le cas de $\aleph_2$, pas au-delà.

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ;

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence
  (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence
  (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence
  (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

• Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

• Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+$V = L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence
  (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+$V = L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

  - signifie(rait) que $V = L^{\text{ultime}}$ est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes)

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+$V=L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

  - signifie(rait) que $V=L^{\text{ultime}}$ est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+$V{=}L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

  - signifie(rait) que $V{=}L^{\text{ultime}}$ est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.
  - (comme pour tout univers $L[X]$) $V{=}L^{\text{ultime}}$ entraîne HC (et même HCG).

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+$V = L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

  - signifie(rait) que $V = L^{\text{ultime}}$ est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.
  - (comme pour tout univers $L[X]$) $V = L^{\text{ultime}}$ entraîne HC (et même HCG).

- Si (un jour) ZF+DP+$V = L^{\text{ultime}}$

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - L^{ultime}:= univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+V=L^{ultime} *est vrai.*

  - signifie(rait) que V=L^{ultime} est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.
  - (comme pour tout univers $L[X]$) V=L^{ultime} entraîne HC (et même HCG).

- Si (un jour) ZF+DP+V=L^{ultime} — ou ZF+DP+un axiome de forcing —

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - L^{ultime} := univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : ZF+DP+V=L^{ultime} *est vrai.*

  - signifie(rait) que V=L^{ultime} est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.
  - (comme pour tout univers $L[X]$) V=L^{ultime} entraîne HC (et même HCG).

- Si (un jour) ZF+DP+V=L^{ultime} — ou ZF+DP+un axiome de forcing — est adopté comme système de référence,

- Approche minimaliste : identifier un plus petit modèle de référence (n'existe que ce qui doit exister... ; par ex. l'univers L des ensembles constructibles) ;
  - mais L non compatible avec les grands cardinaux : développer des analogues à L ?
  - univers $L[U]$ (Kunen, 1971) : compatible avec les cardinaux mesurables ;
  - univers $L[E]$ (Mitchell–Steel, 1980-90s) : compat. avec les card. de Woodin (DP) ;
  - mais : comment espérer compléter le programme avec une hiérarchie sans fin ?

- Théorème (Woodin, 2006) : *Si un univers de type $L[X]$ est compatible avec un cardinal supercompact, il est automatiquement compatible avec tous les grands cardinaux.*

  - $L^{\text{ultime}} :=$ univers $L[X]$ (encore hypothétique...) pour un cardinal supercompact.

- Conjecture (Woodin, 2010) : $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}+V=L^{\text{ultime}}$ *est vrai.*

  - signifie(rait) que $V=L^{\text{ultime}}$ est devenu naturel (jugement esthétique fondé sur une accumulation de théorèmes) et fournit une description exempte de pathologie.
  - (comme pour tout univers $L[X]$) $V=L^{\text{ultime}}$ entraîne HC (et même HCG).

- Si (un jour) $\mathrm{ZF}+\mathrm{DP}+V=L^{\text{ultime}}$ — ou ZF+DP+un axiome de forcing — est adopté comme système de référence, alors le problème du continu aura été résolu.

Plan:

- I. Le problème du continu jusqu'à Cohen
- II. Que signifie découvrir de nouveaux axiomes vrais ?
- III. Une application d'un type nouveau: les tables de Laver

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale

  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$:

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2				
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3				
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4				

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 =$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1)$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$
  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.
    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:
$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1)$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.
    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1			

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1)$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1)$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2		

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
&4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
&4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
&4 \cdot 4
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,$$
$$4 \cdot 4 = 4 \cdot (3 \cdot 1)$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1)
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,

  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,$$
$$4 \cdot 4 = 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$
  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1-\lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4			
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,\\
3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \dots
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4		
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,\\
3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,\\
3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3			
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,$$
$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,$$
$$4 \cdot 4 = 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,$$
$$3 \cdot 2 = 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \ldots$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \qquad \text{(LD)}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents ($x \cdot x = x$), donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2			
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,\\
3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- Loi d'autodistributivité (à gauche) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z). \tag{LD}$$

  - Exemple classique 1 : E module et $x \cdot y := (1 - \lambda)x + \lambda y$;
  - Exemple classique 2 : G groupe et $x \cdot y := xyx^{-1}$.

    NB: idempotents $(x \cdot x = x)$, donc toute structure monogène est triviale
  - (Brieskorn,...) contrepartie algébrique du mouvement de Reidemeister III...

- Une opération sur $\{1, 2, 3, 4\}$: la table de Laver à 4 éléments

$\cdot$	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

- Commencer avec $+1 \bmod 4$ dans la première colonne,
  et compléter en utilisant la règle $x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1)$:

$$\begin{aligned}
4 \cdot 2 &= 4 \cdot (1 \cdot 1) = (4 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = 2,\\
4 \cdot 3 &= 4 \cdot (2 \cdot 1) = (4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 3,\\
4 \cdot 4 &= 4 \cdot (3 \cdot 1) = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) = 3 \cdot 1 = 4,\\
3 \cdot 2 &= 3 \cdot (1 \cdot 1) = (3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 1) = 4 \cdot 4 = 4, \ldots
\end{aligned}$$

- La construction marche pour toutes les tailles :

- La construction marche pour toutes les tailles :

- Proposition (Laver) : (i) *Pour tout* N, *il existe une unique opération* $\cdot$ *sur* $\{1, \ldots, N\}$ *vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

- La construction marche pour toutes les tailles :

- <u>Proposition</u> (Laver) : (i) *Pour tout* N*, il existe une unique opération* $\cdot$ *sur* $\{1, ..., N\}$ *vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si,* N *est une puissance de* 2.

- La construction marche pour toutes les tailles :

- Proposition (Laver) : (i) *Pour tout N, il existe une unique opération $\cdot$ sur $\{1, \dots, N\}$ vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si, N est une puissance de 2.*

  - ▶ A_n := la table de Laver à 2^n éléments.

- La construction marche pour toutes les tailles :

- <u>Proposition</u> (Laver) : (i) *Pour tout N, il existe une unique opération $\cdot$ sur $\{1, ..., N\}$ vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si, N est une puissance de 2.*

  - ▸ A_n := la table de Laver à 2^n éléments.

- Pour $n \geqslant 1$, on a $1 \cdot 1 = 2 \neq 1$ dans A_n : <u>non</u> idempotent.

- La construction marche pour toutes les tailles :

- Proposition (Laver) : (i) *Pour tout N, il existe une unique opération $\cdot$ sur $\{1, \dots, N\}$ vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si, N est une puissance de 2.*

  - $A_n :=$ la table de Laver à 2^n éléments.

- Pour $n \geqslant 1$, on a $1 \cdot 1 = 2 \neq 1$ dans A_n : non idempotent.
  - différent de la conjugaison des groupes et autres LD-structures classiques ;

- La construction marche pour toutes les tailles :

- Proposition (Laver) : (i) *Pour tout N, il existe une unique opération $\cdot$ sur $\{1, ..., N\}$ vérifiant*

$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$

(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si, N est une puissance de 2.*

  - A_n := la table de Laver à 2^n éléments.

- Pour $n \geqslant 1$, on a $1 \cdot 1 = 2 \neq 1$ dans A_n : non idempotent.
  - différent de la conjugaison des groupes et autres LD-structures classiques ;
  - contrepartie de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le monde autodistributif :

- La construction marche pour toutes les tailles :

- Proposition (Laver) : (i) *Pour tout N, il existe une unique opération $\cdot$ sur $\{1, ..., N\}$ vérifiant*
$$x \cdot 1 = x + 1 \bmod N \quad \text{et}$$
$$x \cdot (y \cdot 1) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot 1).$$
(ii) *L'opération obtenue obéit à la loi LD si, et seulement si, N est une puissance de 2.*

  - $A_n :=$ la table de Laver à 2^n éléments.

- Pour $n \geqslant 1$, on a $1 \cdot 1 = 2 \neq 1$ dans A_n : non idempotent.
  - différent de la conjugaison des groupes et autres LD-structures classiques ;
  - contrepartie de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans le monde autodistributif :
    A_n présenté par $\langle 1 \mid 1_{[2^n]} = 1 \rangle_{LD}$, avec $x_{[p]} = (...((x{\cdot}x){\cdot}x)...){\cdot}x$, p termes, ...

A_0	1
1	1

A_0	1
1	1

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_0	1
1	1

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_2	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

A_0	1
1	1

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_2	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

Tables de Laver : exemples

A_0	1
1	1

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_2	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

A_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16
2	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16
3	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16
4	5	6	7	8	13	14	15	16	5	6	7	8	13	14	15	16
5	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16
6	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16
7	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16
10	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16
11	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16
12	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
13	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
14	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

- Proposition (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$*, il existe un entier* $\pi_n(p)$*, puissance de* 2*,*

• Proposition (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$, *il existe un entier* $\pi_n(p)$, *puissance de* 2, *tel que la* $p^{\text{ème}}$ *ligne de* A_n

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p+1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p+1 \bmod 2^{\mathrm{n}}$ à 2^n.*

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

• Proposition (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$*, il existe un entier* $\pi_n(p)$*, puissance de* 2*, tel que la* $p^{\text{ème}}$ *ligne de* A_n *est la répétition périodique de* $\pi_n(p)$ *valeurs croissant de* $p{+}1 \bmod 2^{\mathrm{n}}$ *à* 2^n*.*

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

▶ $\pi_3(8) = 8$

• Proposition (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p+1 \bmod 2^{\mathrm{n}}$ à 2^n.*

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p+1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p{+}1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Proposition (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p{+}1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Proposition (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$, *il existe un entier* $\pi_n(p)$, *puissance de* 2, *tel que la* $p^{\text{ème}}$ *ligne de* A_n *est la répétition périodique de* $\pi_n(p)$ *valeurs croissant de* $p{+}1 \bmod 2^n$ *à* 2^n.

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Proposition (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$, *il existe un entier* $\pi_n(p)$, *puissance de* 2, *tel que la* $p^{\text{ème}}$ *ligne de* A_n *est la répétition périodique de* $\pi_n(p)$ *valeurs croissant de* $p{+}1 \bmod 2^{\mathrm{n}}$ *à* 2^n.

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Proposition (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p{+}1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(1) = 4$
- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p+1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(1) = 4$
- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Quelques valeurs des périodes de 1 et 2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\pi_n(1)$	1	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	...
$\pi_n(2)$	–	2	2	4	4	8	8	16	16	16	16	16	...

• Proposition (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p{+}1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• Exemple :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(1) = 4$
- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Quelques valeurs des périodes de 1 et 2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\pi_n(1)$	1	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	…
$\pi_n(2)$	–	2	2	4	4	8	8	16	16	16	16	16	…

- Question 1 : A-t-on toujours $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$?

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout* $p \leqslant 2^n$, *il existe un entier* $\pi_n(p)$, *puissance de* 2, *tel que la* $p^{\text{ème}}$ *ligne de* A_n *est la répétition périodique de* $\pi_n(p)$ *valeurs croissant de* $p{+}1 \bmod 2^n$ *à* 2^n.

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(1) = 4$
- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Quelques valeurs des périodes de 1 et 2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\pi_n(1)$	1	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	...
$\pi_n(2)$	–	2	2	4	4	8	8	16	16	16	16	16	...

- <u>Question 1</u> : A-t-on toujours $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$?
- <u>Question 2</u> : La période $\pi_n(1)$ tend-elle vers l'infini avec n ?

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Pour tout $p \leqslant 2^n$, il existe un entier $\pi_n(p)$, puissance de 2, tel que la $p^{\text{ème}}$ ligne de A_n est la répétition périodique de $\pi_n(p)$ valeurs croissant de $p{+}1 \bmod 2^n$ à 2^n.*

• <u>Exemple</u> :

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	6	8	2	4	6	8
2	3	4	7	8	3	4	7	8
3	4	8	4	8	4	8	4	8
4	5	6	7	8	5	6	7	8
5	6	8	6	8	6	8	6	8
6	7	8	7	8	7	8	7	8
7	8	8	8	8	8	8	8	8
8	1	2	3	4	5	6	7	8

- $\pi_3(1) = 4$
- $\pi_3(2) = 4$
- $\pi_3(3) = 2$
- $\pi_3(4) = 4$
- $\pi_3(5) = 2$
- $\pi_3(6) = 2$
- $\pi_3(7) = 1$
- $\pi_3(8) = 8$

• Quelques valeurs des périodes de 1 et 2 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\pi_n(1)$	1	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	…
$\pi_n(2)$	–	2	2	4	4	8	8	16	16	16	16	16	…

- <u>Question 1</u> : A-t-on toujours $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$?
- <u>Question 2</u> : La période $\pi_n(1)$ tend-elle vers l'infini avec n ? Atteint-elle 32 ?

- Théorème (Laver, 1995) :

  la réponse aux questions sur les périodes est positive.

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini*
  la réponse aux questions sur les périodes est positive.

- <u>Théorème</u> (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$.

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R,

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$,

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??),

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
  - « être l'image de... » est $\in$-définissable,

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
  - « être l'image de... » est $\in$-définissable,

    donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$,

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
  - « être l'image de... » est $\in$-définissable,

    donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)) = i(j)(i(k))$:

- Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

- Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

- Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
  - « être l'image de... » est $\in$-définissable,

    donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)) = i(j)(i(k))$: loi LD.

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
- alors il existe un rang super-infini, disons R ;
- si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
- « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
- « être l'image de... » est $\in$-définissable,
  donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell)=i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k))=i(j)(i(k))$: loi LD.

• Proposition (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*
- *L'ensemble* Iter(j) *des itérés de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver » —, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :

- alors il existe un rang super-infini, disons R ;
- si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
- « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
- « être l'image de... » est $\in$-définissable,

  donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)) = i(j)(i(k))$: loi LD.

• Proposition (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*

- *L'ensemble* Iter(j) *des itérés de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*
- *Pour tout n, il existe une congruence sur* Iter(j) *avec 2^n classes et telle que la première colonne de la table du quotient est un cycle,*

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
  - alors il existe un rang super-infini, disons R ;
  - si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
  - « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
  - « être l'image de... » est $\in$-définissable,
    donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell)=i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k))=i(j)(i(k))$: loi LD.

• Proposition (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*
  - *L'ensemble* Iter(j) *des itérés de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*
  - *Pour tout n, il existe une congruence sur* Iter(j) *avec 2^n classes et telle que la première colonne de la table du quotient est un cycle, donc le quotient est A_n.*

• <u>Théorème</u> (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• <u>Définition</u> : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
- alors il existe un rang super-infini, disons R ;
- si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i <u>s'applique</u> à j ;
- « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
- « être l'image de... » est $\in$-définissable,

  donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)) = i(j)(i(k))$: loi LD.

• <u>Proposition</u> (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*
- *L'ensemble* Iter(j) *des <u>itérés</u> de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*
- *Pour tout n, il existe une congruence sur* Iter(j) *avec 2^n classes et telle que la première colonne de la table du quotient est un cycle, donc le quotient est A_n.*
- *(<u>dictionnaire</u>) Pour $m \leqslant n$ et $p \leqslant 2^n$:*

$$\pi_n(p) = 2^m < \pi_{n+1}(p) = 2^{m+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad j_{[p]}(\mathrm{crit}(j_{[2^m]})) = \mathrm{crit}(j_{[2^n]}).$$

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R \to R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :

- alors il existe un rang super-infini, disons R ;
- si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
- « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
- « être l'image de... » est $\in$-définissable,

  donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell) = i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)) = i(j)(i(k))$: loi LD.

• Proposition (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*

- *L'ensemble* Iter(j) *des itérés de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*
- *Pour tout n, il existe une congruence sur* Iter(j) *avec 2^n classes et telle que la première colonne de la table du quotient est un cycle, donc le quotient est A_n.*
- *(dictionnaire) Pour $m \leqslant n$ et $p \leqslant 2^n$:*

$$\pi_n(p) = 2^m < \pi_{n+1}(p) = 2^{m+1} \quad \Longleftrightarrow \quad j_{[p]}(\mathrm{crit}(j_{[2^m]})) = \mathrm{crit}(j_{[2^n]}).$$

$\uparrow$

$j(j)(j)...(j)$, p fois j

• Théorème (Laver, 1995) : *S'il existe un ensemble super-infini — « un cardinal de Laver »—, la réponse aux questions sur les périodes est positive.*

• Définition : Un rang est un ensemble R t.q. $f : R{\to}R$ entraîne $f \in R$. (? Cela existe...)

• Supposons qu'il existe un ensemble super-infini (i.e., $\exists$ plongement...) :
- alors il existe un rang super-infini, disons R ;
- si i, j sont des plongements sur R, alors $i : R \to R$ et $j \in R$, donc i s'applique à j ;
- « être un plongement » est $\in$-définissable (??), donc $i(j)$ est un plongement ;
- « être l'image de... » est $\in$-définissable,
  donc $\ell = j(k)$ entraîne $i(\ell){=}i(j)(i(k))$, *i.e.*, $i(j(k)){=}i(j)(i(k))$: loi LD.

• Proposition (Laver) : *Supposons que j est un plongement sur un rang R.*
- *L'ensemble* $\mathrm{Iter(j)}$ *des itérés de j — i.e., j, $j(j)$, $j(j)(j)$... — obéit à la loi LD.*
- *Pour tout n, il existe une congruence sur* $\mathrm{Iter(j)}$ *avec 2^n classes et telle que la première colonne de la table du quotient est un cycle, donc le quotient est A_n.*
- *(dictionnaire) Pour $m \leqslant n$ et $p \leqslant 2^n$:*
  $\pi_n(p) = 2^m < \pi_{n+1}(p) = 2^{m+1} \quad \Longleftrightarrow \quad j_{[p]}(\mathrm{crit}(j_{[2^m]})) = \mathrm{crit}(j_{[2^n]})$.

$\uparrow$ $j(j)(j)...(j)$, p fois j $\quad$ $\uparrow$ le plus petit ordinal bougé par...

- Lemme : *Si* j *est un plongement, alors, pour tout ordinal* α*, on a* $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$*.*

- Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

  - Démonstration :

- Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

  - Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$,

- <u>Lemme</u> : *Si* j *est un plongement, alors, pour tout ordinal* α, *on a* $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.

  - Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β,

- Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

   - Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

• <u>Lemme</u> : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \tag{$*$}$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \tag{$**$}$$

• Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \tag{$*$}$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \tag{$**$}$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. $\square$

• <u>Lemme</u> : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \tag{$*$}$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \tag{$**$}$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. $\square$

• <u>Proposition</u> (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini»*

• <u>Lemme</u> : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▸ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \tag{$*$}$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \tag{$**$}$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. $\square$

• <u>Proposition</u> (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver —*

• Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall\gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \tag{$*$}$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall\gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \tag{$**$}$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. $\square$

• Proposition (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

• Proposition (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

- Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \ (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \ (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

- Proposition (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

- Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

- Démonstrations alternatives sans axiome de grand cardinal ?

• <u>Lemme</u> : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall\gamma < \beta\ (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall\gamma < j(\beta)\ (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

• <u>Proposition</u> (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

• Démonstrations alternatives sans axiome de grand cardinal ? <u>Pas encore</u>...

• Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

• Proposition (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

• Démonstrations alternatives sans axiome de grand cardinal ? Pas encore...

▶ résultats partiels de Drápal...

• Lemme : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall\gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall\gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

• Proposition (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

• Démonstrations alternatives sans axiome de grand cardinal ? Pas encore...

▶ résultats partiels de Drápal... mais pas de preuve complète pour le moment ;

• <u>Lemme</u> : *Si j est un plongement, alors, pour tout ordinal α, on a $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$.*

▶ Démonstration : Il existe β vérifiant $j(\beta) > \alpha$, donc il existe un plus petit tel β, et alors on a $j(\beta) > \alpha$ et

$$\forall \gamma < \beta \; (j(\gamma) \leqslant \alpha). \qquad (*)$$

On applique le plongement j à $(*)$:

$$\forall \gamma < j(\beta) \; (j(j)(\gamma) \leqslant j(\alpha)). \qquad (**)$$

En prenant $\gamma = \alpha$ dans $(**)$, on obtient $j(j)(\alpha) \leqslant j(\alpha)$. □

• <u>Proposition</u> (Laver) : *S'il existe un ensemble «super-infini» — à savoir s'il existe un cardinal de Laver — alors, pour tout n, on a $\pi_n(2) \geqslant \pi_n(1)$.*

• Idem (plus difficile) pour la question 1 (période de 1 dans A_n tend vers l'∞).

• Démonstrations alternatives sans axiome de grand cardinal ? <u>Pas encore</u>...

▶ résultats partiels de Drápal... mais pas de preuve complète pour le moment ;

▶ situation étrange : pourquoi un lien entre des tables finies et des grands infinis ?

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une <u>application</u> de la théorie des ensembles ?

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ;

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie :

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ;

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini),

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démonstrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞),

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démonstrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démonstrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démonstrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

RÉSUMÉ :

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, explorant les diverses possibilités

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démonstrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

RÉSUMÉ :

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, explorant les diverses possibilités (ni plus, ni moins: les «maths modernes» étaient un malentendu...)

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

RÉSUMÉ :

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, explorant les diverses possibilités (ni plus, ni moins: les «maths modernes» étaient un malentendu...)

• L'Histoire continue :

- Une théorie cohérénte au-delà de ZF est possible ;

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

RÉSUMÉ :

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, explorant les diverses possibilités (ni plus, ni moins: les «maths modernes» étaient un malentendu...)

• L'Histoire continue :

- Une théorie cohérénte au-delà de ZF est possible ;
- Il existe un consensus pour enrichir ZF en ZF+DP ;

• Dernière question : Les propriétés des tables de Laver sont-elles une application de la théorie des ensembles ?

- Pour le moment, oui ; plus tard, formellement non si démontrations alternatives.
- Mais, à jamais, c'est la théorie des ensembles qui a fait découvrir les propriétés...
- Une analogie : En physique : par une intuition physique, deviner un énoncé, puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle ; Ici: par une intuition logique (existence d'un ensemble super-infini), deviner un énoncé (les périodes dans les tables de Laver tendent vers l'∞), puis le passer au mathématicien pour une preuve formelle.
- Pas besoin de croire à l'existence des grands cardinaux pour les utiliser...

RÉSUMÉ :

• La théorie des ensembles est une théorie de l'infini, explorant les diverses possibilités (ni plus, ni moins: les «maths modernes» étaient un malentendu...)

• L'Histoire continue :

- Une théorie cohérénte au-delà de ZF est possible ;
- Il existe un consensus pour enrichir ZF en ZF+DP ;
- L'étape suivante inclura une solution du problème du continu.

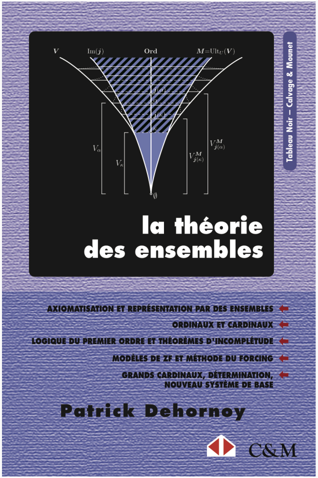
- W. Hugh Woodin, *Strong axioms of infinity and the search for V*, Proceedings ICM Hyderabad 2010, pp. 504–528

- W. Hugh Woodin, *Strong axioms of infinity and the search for V*,
  Proceedings ICM Hyderabad 2010, pp. 504–528

- P. Dehornoy, La théorie des ensembles,
  Calvage & Mounet (2017)

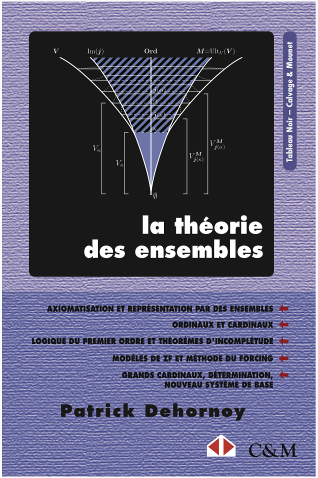
- W. Hugh Woodin, *Strong axioms of infinity and the search for V*, Proceedings ICM Hyderabad 2010, pp. 504–528

- P. Dehornoy, La théorie des ensembles, Calvage & Mounet (2017)



- W. Hugh Woodin, *Strong axioms of infinity and the search for V*, Proceedings ICM Hyderabad 2010, pp. 504–528

- P. Dehornoy, La théorie des ensembles, Calvage & Mounet (2017)



//dehornoy.users.lmno.cnrs.fr/