Ordre des tresses: histoire et connection avec les nœuds

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Grenoble, avril 2018

- Quelques-uns des nombreux aspects de l'ordre standard des tresses,
  - avec un accent sur les quelques connections connues avec la théorie des nœuds.

Plan:

- I. L'ordre des tresses dans l'Antiquité
- II. L'ordre des tresses au Moyen-Âge
- III. L'ordre des tresses dans les Temps Modernes

Plan:

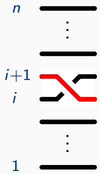
- I. L'ordre des tresses dans l'Antiquité: 1985-1995

- II. L'ordre des tresses au Moyen-Âge
- III. L'ordre des tresses dans les Temps Modernes

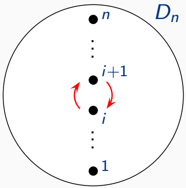
- Définition (Artin 1925/1948) : Le groupe des tresses à n brins est le groupe

$$B_n := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{pour } |i-j| \geqslant 2 \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle.$$

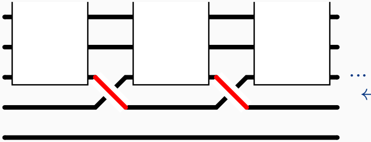
$\simeq$ { diagrammes de tresse } / isotopie:

$\sigma_i \quad \leftrightarrow$ 

$\simeq$ mapping class group de D_n (disque avec n points marqués):

$\sigma_i \quad \leftrightarrow$ 

• Définition : Un diagramme de tresses σ-positif :



$\leftarrow$les croisements inférieurs ($= \sigma_i$ avec i minimal)
sont tous positifs (pas de σ_i^{-1})

• Théorème 1 (D. 1992) : *Pour $\beta, \beta' \in B_n$, déclarons $\beta <_D \beta'$ si $\beta^{-1}\beta'$ est représentable par un diagramme σ-positif. Alors $<_D$ est un ordre total sur B_n invariant à gauche.*

$\uparrow$
$\beta <_D \beta'$ implique $\alpha\beta <_D \alpha\beta'$

• Exemple: Soit $\beta := \sigma_1$, $\beta' := \sigma_2\sigma_1$. Alors $\beta^{-1}\beta' = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}$, donc $\beta <_D \beta'$.

• Question : D'où vient cet ordre ?

- Réponse : De la théorie des ensembles et des grands cardinaux.

• Définition : Un shelf (ou LD-système) est une structure algébrique $(S, \triangleright)$ avec $\triangleright$ obéissant à la loi d'autodistributivité

$$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z).$$

• Exemple 1 : (moyenne) $s \triangleright t := \lambda s + (1 - \lambda)t$.
• Exemple 2 : (conjugaison) $s \triangleright t := sts^{-1}$.
  - tous idempotents: $s \triangleright s = s$.

• Définition : Un shelf $(S, \triangleright)$ est acyclique si on n'a jamais

$$s = (\cdots((s \triangleright t_1) \triangleright t_2) \cdots \triangleright t_p\,;$$

Un shelf $(S, \triangleright)$ est ordonnable s'il existe un ordre total $<$ sur S vérifiant, pour tous s, t,

$$s < s \triangleright t.$$

  - ordonnable $\Rightarrow$ acyclique $\Rightarrow$ non idempotent: $s = s \triangleright s$ impossible.

- <u>Proposition</u> (D., 1989) : *S'il existe un shelf acyclique :*
  - *Il existe un shelf ordonnable ;*
  - *Le problème de mot de* LD *est résoluble.*

    $\uparrow$ reconnaître si deux expressions formelles sont équivalentes modulo LD

- <u>Proposition</u> (Laver, 1989) : *S'il existe un cardinal de Laver, alors, pour tout plongement j associé, le shelf $\mathit{Iter}(j)$ est acyclique.*

  $\uparrow$ une application d'un rang R dans lui-même témoignant de ce que R est «super-infini»

  $\uparrow$ itérés de j : j, $j(j)$, $j(j)(j)$, etc.

  - Démonstration : $\mathrm{crit}(j(k)) = j(\mathrm{crit}(k)) \neq \mathrm{crit}(j)$, donc $j(k) \neq j$. $\square$

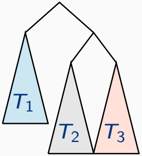
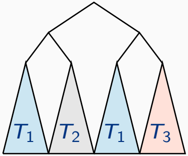
- <u>Corollaire</u> : *S'il existe un cardinal de Laver, le problème de mot de* LD *est résoluble.*

  - <u>Très</u> étrange !!! Peut-on éviter l'hypothèse de grand cardinal ?

- <u>Théorème</u> (D. 1991): *Il existe un shelf acyclique, à savoir le shelf monogène libre S_1.*

  - ▶ Démonstration (principe) : Introduire le «groupe de Thompson de LD»
(comme F est celui de l'associativité).

  Soit $\mathcal{T}$:= toutes les expressions formelles sur x et $\triangleright$ = tous les arbres binaires ;
  Soit LD_α := opérateur «appliquer la loi LD à l'adresse α dans le sens expansion»

  = remplacer  par  sous l'adresse α

  Soit $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$:= monoïde engendré par tous les opérateurs $\mathrm{LD}_\alpha^{\pm 1}$ agissant sur $\mathcal{T}$.
  Alors (trivial) S_1 est le quotient de $\mathcal{T}$ par l'action de $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$, et S_1 est acyclique ssi un élément de $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$ n'envoie jamais un arbre sur un de ses sous-arbres gauches
  ...ce qui se montre en développant une «théorie de Garside» pour $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$. □
  $\uparrow$
  les éléments s'écrivent ab^{-1} avec a, b dans le monoïde engendré par les LD_α

- <u>Corollaire 1</u> : ~~*S'il existe un cardinal de Laver*~~, *le problème de mot de* LD *est résoluble.*

- <u>Corollaire 2</u> : ordre des tresses.

- Méthode: utiliser les coloriages de diagrammes de tresse :
  - fixer un ensemble S ("couleurs") avec $\triangleright$ opération binaire sur S,
  - appliquer des couleurs aux extrémités gauche d'un diagramme,
  - propager vers la droite par 

  - comparer les n couleurs d'entrée et les n couleurs de sortie :

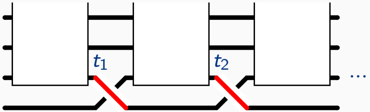
    définit une action des diagrammes de tresse à n brins sur S^n.

- <u>Lemme</u>: *Le coloriage induit une action de B_n^+ sur S^n ssi $(S, \triangleright)$ est un shelf,*
  et une action partielle de B_n sur S^n si, de plus, $(S, \triangleright)$ est simplifiable à gauche.

  $\uparrow$

  pas toujours définie, mais, pour tous $\beta_1, \ldots, \beta_p$ dans B_n,
  il existe $\vec{s}$ dans S^n t.q. $\beta_1 \bullet \vec{s}, \ldots, \beta_p \bullet \vec{s}$ soient définies.

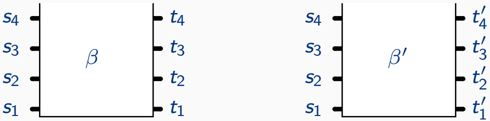
- Lemme 1 : *Un diagramme de tresse σ-positif n'est jamais trivial.*
  - Démonstration: colorier avec un shelf ordonnable...



$$s \;<\; s \triangleright t_1 \;<\; (s \triangleright t_1) \triangleright t_2 \;<\; \cdots \;\neq\; s.$$

$\square$

- Lemme 2 : *Deux tresses sont toujours comparables.*
  - Démonstration: colorier avec un shelf ordonnable...



Alors $\beta <_{\mathrm{D}} \beta'$ ssi $(t_1, t_2, \ldots) <^{\mathrm{Lex}} (t'_1, t'_2, \ldots)$. $\square$

- Question: L'ordre des tresses est-il une application la théorie des ensembles ?
  - Formellement, non : les tresses apparaissent quand les ensembles disparaissent.
  - Essentiellement, oui : les shelves ordonnables n'ont été étudiés que parce que la théorie des ensembles avait suggéré qu'ils pouvaient exister et être mêlés à des phénomènes non triviaux.

- Remarque: Le lien «loi LD/groupe de Thompson $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$/tresses» n'est pas fortuit :
  - relations «géométriques» dans $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$:

$$\mathrm{LD}_{\alpha 11\beta}\mathrm{LD}_{\alpha} = \mathrm{LD}_{\alpha}\mathrm{LD}_{\alpha 11\beta}, \quad \mathrm{LD}_{\alpha 1}\mathrm{LD}_{\alpha}\mathrm{LD}_{\alpha 1}\mathrm{LD}_{\alpha 0} = \mathrm{LD}_{\alpha}\mathrm{LD}_{\alpha 1}\mathrm{LD}_{\alpha}, \text{ etc.} \qquad (*)$$

  - collapser les adresses contenant 0 (= tuer le défaut d'autodistributivité)
  - restent les $\mathrm{LD}_{11\dots1}$: en écrivant σ_i pour $\mathrm{LD}_{1^{i-1}}$, les relations restantes sont

$$\sigma_{i+2+j}\sigma_i = \sigma_i\sigma_{i+2+j}, \quad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} :$$

Le groupe des tresses B_∞ est un quotient du groupe de Thompson $\mathcal{G}_{\mathrm{LD}}$.

Plan:

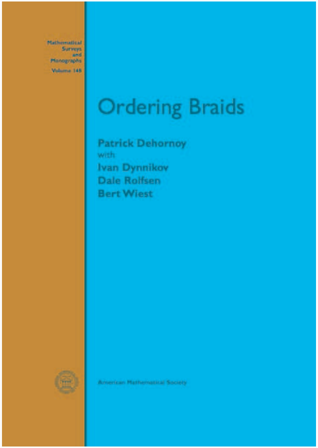
- I. L'ordre des tresses dans l'Antiquité
- II. L'ordre des tresses au Moyen-Âge: 1995–2000

- III. L'ordre des tresses dans les Temps Modernes

- L'ordre des tresses est un objet compliqué: non-Archimédien, non-Conradien, ...

$\uparrow$ $\uparrow$

$\exists \beta, \beta' > 1\ \forall p\ (\beta^p <_{\mathrm{D}} \beta')$ $\exists \beta, \beta' > 1\ \forall p\ (\beta <_{\mathrm{D}} \beta' \beta^p)$



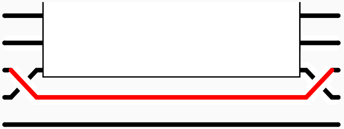
- Théorèmes (Burckel, D., Dynnikov, Fenn, Fromentin, Funk, Greene, Larue, Rolfsen, Rourke, Short, Wiest, ...) :

  «De nombreuses approches mènent au même ordre sur les tresses».

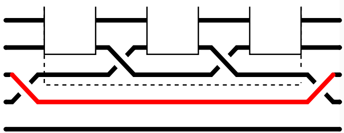
- Théorèmes (Clay, Dubrovina–Dubrovin, Ito, Navas, Rolfsen, Short, Wiest, ...) :

  «Il existe de nombreux ordres sur les tresses formant un espace intéressant».

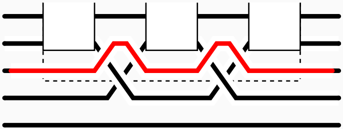
- Une σ_i-poignée :



- Réduire une poignée :



$\mapsto$



  - La réduction des poignées est une isotopie ;
  - Elle étend la réduction des groupes libres ;
  - Les mots sans poignée sont : le mot vide, les mots σ-positifs, les mots σ-négatifs.

- Théorème (D. 1995) : *Une tresse β satisfait $\beta = 1$ (resp. $\beta > 1$) ssi une/toute suite de réductions de poignée à partir d'un/de tout mot représentant β finit avec le mot vide (resp. avec un mot σ-positif).*

Convergence de la réduction des poignées (1)

- <u>But</u> : Montrer qu'il n'y a pas de suite infinie de réductions.

- graphe de Cayley de B_n: sommets := braids; arête $\beta \xrightarrow{\sigma_i} \beta'$ pour $\beta\sigma_i = \beta'$.

- Cayley(Δ_n^d): restriction du graphe de Cayley de B_n aux diviseurs de Δ_n^d (au sens du monoïde B_n^+)
  - Exemple : Cayley(Δ_3) =

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[r, dashed] & {} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur, "\sigma_1"] \arrow[dr, dashed, "\sigma_2"'] & & & \Delta_3 \\
 & {} \arrow[r] & {} \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

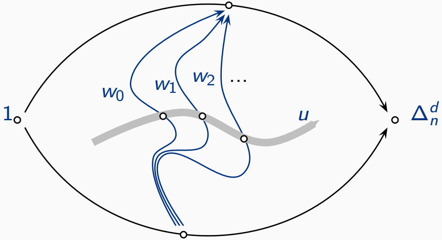
  - Mot de tresse tracé dans Cayley(Δ_n^d) à partir d'un sommet :
    $\sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}$ est tracé à partir de 1 in Cayley(Δ_3), mais σ_1^2 ne l'est pas.

- <u>Lemme</u>: (i) *Tout mot de tresse à n brins est tracé dans Cayley(Δ_n^d) pour $d \gg 0$.*
(ii) *Pour tout β, les mots tracés à partir de β dans Cayley(Δ_n^d) sont clos par réduction.*

- De là : dans toute suite de réductions de poignée à partir d'un mot, les mots successifs sont tous tracés dans un fragment fini du graphe de Cayley de B_n.

- <u>But</u> (rappel) : Montrer qu'il n'y a pas de suite infinie de réductions.

- Soit $\overrightarrow{w} = (w_0, w_1, \ldots)$ une suite de réductions, avec tous les w_i tracés dans Cayley(Δ_n^d).
  - <u>Point</u>: Montrer que $N :=$ #réductions de la 1ère σ_1-poignée dans $\overrightarrow{w}$ est fini.
  - <u>Raison</u>: Il existe un mot-témoin u (transversal), tracé dans Cayley(Δ_n^d), t.q. u ne contient pas de lettre σ_1^{-1}, et contient N lettres σ_1:



  - Or : un chemin sans σ_1^{-1} ne peut pas repasser deux fois par une même arête σ_1.
  - Comme le nombre d'arêtes σ_1 dans Cayley(Δ_n^d) est fini, N est fini. □

- <u>Question</u>: Quelle est la <u>complexité</u> ? Trouver la «<u>vraie</u>» preuve de convergence.

• Définition : Pour x dans $\mathbb{Z}$, posons $x^+ = \max(0, x)$, $x^- = \min(x, 0)$, et

$$F^+(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 + y_1^+ + (y_2^+ - z_1)^+, y_2 - z_1^+, x_2 + y_2^- + (y_1^- + z_1)^-, y_1 + z_1^+),$$
$$F^-(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - y_1^+ - (y_2^+ + z_2)^+, y_2 + z_2^-, x_2 - y_2^- - (y_1^- - z_2)^-, y_1 - z_2^-),$$

avec $z_1 = x_1 - y_1^- - x_2 + y_2^+$ et $z_2 = x_1 + y_1^- - x_2 - y_2^+$.

On définit une action des mots de tresses à n brins sur $\mathbb{Z}^{2n}$ par

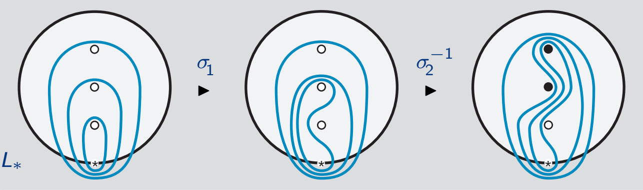
$$(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \bullet \sigma_i^e = (a'_1, b'_1, \ldots, a'_n, b'_n)$$

avec $a'_k = a_k$ et $b'_k = b_k$ pour $k \neq i, i+1$, et $(a'_i, b'_i, a'_{i+1}, b'_{i+1}) = F^e(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1})$, puis les coordonnées d'un mot de tresse w comme $(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1) \bullet w$.

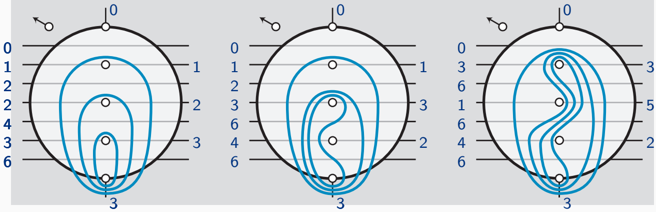
• Remarque : semble «terrible», mais facile à implémenter (complexité quadratique).

• Théorème (Dynnikov, 2000) : *Une tresse* β *satisfait* $\beta = 1$ (*resp.* $\beta >_D 1$) *ssi les coordonnées d'un/de tout mot de tresse représentant* β *sont* $(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ (*resp. la première coordonnée impaire non nulle est positive*).

• Regarder une tresse à n brins comme classe d'isotopie d'un homéomorphisme d'un disque à n points marqués ; ▸ agit sur les laminations de D_n (plongé dans S^2).



• Compter les intersections de $\beta(L_*)$ avec une triangulation (singulière) fixée T_* :



▸ $3n+3$ entiers qui déterminent la tresse ; coordonnées = demi-différences

(réduit de $3n+3$ à $2n$ entiers relatifs)

- Question: Quelles sont les coordonnées de $\beta\sigma_i$ en termes de celles de β et de i ?

  $=$ comparer les intersections de L et de $\sigma_i(L)$ avec la triangulation de base T_*

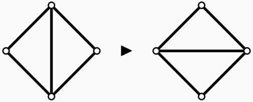
  $\uparrow$

  une lamination $\approx$ famille de courbes fermées

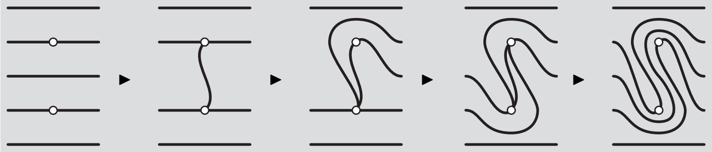
- On a $\#(\sigma_i(L) \cap T_*) = \#(L \cap \sigma_i^{-1}(T_*))$.

  Donc revient à comparer les intersections of L avec T_* et $\sigma_i^{-1}(T_*)$.

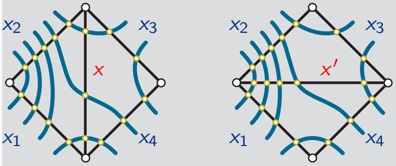
- Fait: Si T, T' sont deux triangulations (singulières) d'une surface, on peut passer de T à T' par une suite finie de flips :



- Donc: décomposer le passage de T_* à $\sigma_i^{-1}(T_*)$ en un produit de flips :



- Or, pour un flip:



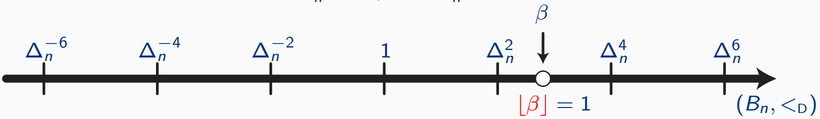
$$x + x' = \max(x_1 + x_3, x_2 + x_4)$$

▸ formules de Dynnikov en itérant quatre fois...

Plan:

- I. L'ordre des tresses dans l'Antiquité
- II. L'ordre des tresses au Moyen-Âge
- III. L'ordre des tresses dans les Temps Modernes: depuis 2000

- <u>Définition</u> : Pour β dans B_n, le plancher $\lfloor \beta \rfloor$ est l'unique entier m satisfaisant
$$\Delta_n^{2m} \leqslant_{\mathrm{D}} \beta <_{\mathrm{D}} \Delta_n^{2m+2}.$$



- <u>Proposition</u> (Malyutin–Netsvetaev, 2000) :
  (i) *Le plancher est un quasi-caractère de défaut* 1 *sur* B_n : $\big| \lfloor \beta\gamma \rfloor - \lfloor \beta \rfloor - \lfloor \gamma \rfloor \big| \leqslant 1$.
  (ii) *Si* β *et* β' *sont conjuguées, on a* $|\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \beta' \rfloor| \leqslant 1$.

- <u>Principe</u> pour utiliser le plancher en théorie des nœuds :

> Si $|\lfloor \beta \rfloor|$ est grand, les propriétés de l'entrelacs $\widehat{\beta}$ peuvent être lues à partir de β.

- <u>Lemme</u> : *Si* $||\lfloor\beta\rfloor|| \geqslant 2$, *alors* $\widehat{\beta}$ *n'admet pas de déstabilisation.*

  $\uparrow$

  (pour $\beta \in B_n$) β n'est conjuguée à aucune tresse $\gamma\sigma_{n-1}^{\pm 1}$ avec $\gamma \in B_{n-1}$

  ▶ Démonstration : supposons $\beta \sim \gamma\sigma_{n-1}$ avec $\gamma \in B_{n-1}$.
  Alors $\beta \sim \Delta_n \gamma \sigma_{n-1} \Delta_n^{-1} = \mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1$,
  où sh : $\sigma_i \mapsto \sigma_{i+1}$ pour tout i et $\gamma' := \Delta_{n-1}\gamma\Delta_{n-1}^{-1}$.
  De là : $1 <_{\mathrm{D}} \mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1$, puisque $\mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1$ est σ-positif.
  Et $\mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1 <_{\mathrm{D}} \Delta_n^2$, puisque $\sigma_1^{-1}\mathrm{sh}(\gamma'^{-1})\Delta_n^2 = \sigma_1^{-1}\Delta_n^2\mathrm{sh}(\gamma'^{-1})$ est σ-positif.
  Donc, $1 <_{\mathrm{D}} \mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1 <_{\mathrm{D}} \Delta_n^2$, soit $\lfloor \mathrm{sh}(\gamma')\sigma_1 \rfloor = 0$.
  Donc $||\lfloor\beta\rfloor|| \leqslant 1$. Idem pour $\beta \sim \gamma\sigma_{n-1}^{-1}\cdots$ □

- <u>Proposition</u> (Malyutin–Netsvetaev, Ito) :
  (i) *Si on a* $||\lfloor\beta\rfloor|| \geqslant 2$, *alors* $\widehat{\beta}$ *n'admet pas d'exchange move.*

  $\uparrow$

  (pour $\beta \in B_n$) β conjuguée à aucune tresse $\gamma_1\sigma_{n-1}^{\pm 1}\gamma_2\sigma^{\mp 1}$ avec $\gamma_1, \gamma_2 \in B_{n-1}$

  (ii) *Si on a* $||\lfloor\beta\rfloor|| \geqslant 3$, *alors* $\widehat{\beta}$ *n'admet pas de flype.*

  $\uparrow$

  β conjuguée à aucune tresse $\gamma_1\sigma_{n-1}\gamma_2\sigma_{n-1}^{\pm 1}\gamma_3\sigma_{nn-1}^{-1}$ avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in B_{n-1}$

• Théorème (Malyutin–Netsvetaev, 2004) :
Si on a $||\lfloor\beta\rfloor|| > 1$, *alors* $\widehat{\beta}$ *est premier, non scindé, et non trivial.*

▶ Démonstration : Si χ est un pseudo-caractère sur B_n satisfaisant $\chi|_{B_{n-1}} = 0$, alors $|\chi(\beta)| >$ défaut(χ) entraîne que $\widehat{\beta}$ est premier. Appliquer à $\lfloor\ \rfloor_s$. □

version stable du plancher $:= \lim\lfloor\beta^s\rfloor/s$

• Théorème (Malyutin–Netsvetaev, 2004) : *Pour tout* n, *il existe* $r(n)$ *t.q., pour tout* β *de* B_n *vérifiant* $||\lfloor\beta\rfloor|| \geqslant r(n)$, *l'entrelacs* $\widehat{\beta}$ *correspond à une unique classe de conjugaison.*

$\forall\beta, \beta' \in B_n\ (\widehat{\beta'} \approx \widehat{\beta} \Rightarrow \beta' \sim \beta)$

▶ Démonstration : Pour tout «template move» M, il existe r t.q. $||\lfloor\beta\rfloor|| > r$ entraîne que M ne s'applique pas à $\widehat{\beta}$. Suivant la théorie MTWS de Birman-Menasco, il n'existe qu'un nombre fini de template moves pour chaque n. □

- Théorème (Ito, 2012) : *Pour toute tresse β dans B_n :*

$$||\lfloor\beta\rfloor|| \leqslant \frac{4 \cdot \mathrm{genus}(\widehat{\beta}) - 2}{n+2} + \frac{3}{2} \leqslant \mathrm{genus}(\widehat{\beta}) + 1.$$

«La clôture d'une grande tresse est un nœud compliqué.»

- Théorème (Ito, 2012) : *Si β satisfait $||\lfloor\beta\rfloor|| \geqslant 2$ et si $\widehat{\beta}$ est un nœud, alors*
  - *β est périodique ssi $\widehat{\beta}$ est un nœud torique,*
  - *β est réductible ssi $\widehat{\beta}$ est un nœud satellite,*
  - *β est pseudo-Anosov ssi $\widehat{\beta}$ est hyperbolique.*

Faux en général : le nœud de trèfle est la clôture de σ_1^3 (périodique), de $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$ (réductible), et de $\sigma_1^3\sigma_2^{-1}$ (pseudo-Anosov).

• <u>Théorème</u> (Ito, 2014) : *Pour H sous-groupe distingué non trivial non central de B_n, et γ dans B_n, l'ensemble $\{\widehat{\beta\gamma} \mid \beta \in H\}$ contient une infinité de nœuds hyperboliques.*

▶Démonstration : H est non borné par rapport à $<_D$: $\forall\gamma\in B_n\ \exists\beta\in H\ (\gamma <_D \beta)$.
(non trivial: utilise la forme normale alternante des tresses)
Alors $\{\beta\gamma \mid \beta \in H\}$ est aussi non borné.
Alors $\{\beta\gamma \mid \beta \in H \text{ et } \beta \text{ pure}\}$ est aussi non borné.
Dès que $\widehat{\gamma}$ est un nœud, $\{\widehat{\beta\gamma} \mid \beta \in H \text{ et } \beta \text{ pure}\}$ contient des nœuds de genres non bornés, donc certainement une infinité de nœuds distincts.
De plus, on peut se limiter à $\beta\gamma$ pseudo-Anosov, et, de là, à $\widehat{\beta\gamma}$ hyperbolique.□

• <u>Corollaire</u> (Ito, 2014) : *Si $\rho_1, \ldots, \rho_k$ sont des représentations quantiques non fidèles de B_n, alors, pour tout type d'isotopie τ, il existe une infinité de nœuds hyperboliques de type τ sur lesquels les invariants dérivés de $\rho_1, \ldots, \rho_k$ prennent la même valeur.*

• <u>Corollaire</u> (Ito, 2014) : *Si la représentation de Burau de B_4 n'est pas fidèle, il existe un nœud non trivial qui a un polynôme de Jones trivial.*

- Théorème (Laver, 1995) : *Pour toute tresse β et tout i, on a $\beta^{-1}\sigma_i\beta >_D 1$.*

- Corollaire : *La restriction de l'ordre $<_D$ à B_n^+ est un bon ordre.*

  $\uparrow$ le sous-monïde de B_n engendré par $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$

  $\uparrow$ tout sous-ensemble non vide de B_n^+ a un plus petit élément

- Définition : Pour β dans B_n^+, posons

$$\mu(\beta) := \min\{\beta' \in B_n^+ \mid \beta' \text{ conjugué à } \beta\}.$$

utile seulement si la fonction μ peut être calculée...

- Conjecture (D., Fromentin, Gebhardt, 2009) : Pour β dans B_3^+,

$$\mu(\beta\Delta_3^2) = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1 \cdot \mu(\beta) \cdot \sigma_1^2.$$

... plus généralement, espoir raisonnable de calculer μ avec la forme normale alternante et son analogue pour le monoïde dual (forme normale tournante de Fromentin).

- P. Dehornoy, with I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, *Ordering braids*
  Math. Surveys and Monographs vol. 148, Amer. Math. Soc. (2008)

- A. Malyutin and N. Netsvetaev, Dehornoy's ordering on the braid group and braid moves,
  St. Peterburg Math. J. 15 (2004) 437-448.

- T. Ito, Braid ordering and knot genus, *J. Knot Th. Ramif.* 20 (2011) 1311-1323.

- T. Ito, Braid ordering and the geometry of closed braids, *Geom. Topol.* 15 (2011) 473-498.

- T. Ito, A kernel of braid group representation yields a knot with trivial knot polynomial,
  Math. Zeitschr. 280 (2015) 347-353.

- J. Fromentin, Every braid admits a short sigma-definite expression,
  J. Europ. Math. Soc. 13 (2011) 1591-1631.

www.math.unicaen.fr/∼dehornoy