

Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses



Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Amiens, février 2019



Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Amiens, février 2019

- Comme les tresses Δ_n dans le monoïde B_{∞}^+ , des éléments de Garside dans un monoïde M sont des éléments Δ_n dont les diviseurs donnent une forme normale canonique pour les éléments de M .



Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Amiens, février 2019

- Comme les tresses Δ_n dans le monoïde B_∞^+ , des éléments de Garside dans un monoïde M sont des éléments Δ_n dont les diviseurs donnent une forme normale canonique pour les éléments de M .
- Cas du monoïde de Thompson F^+ , proche d'un monoïde commutatif libre, avec 2^n diviseurs de Δ_n .



Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
Université de Caen

Amiens, février 2019

- Comme les tresses Δ_n dans le monoïde B_∞^+ , des éléments de Garside dans un monoïde M sont des éléments Δ_n dont les diviseurs donnent une forme normale canonique pour les éléments de M .
- Cas du monoïde de Thompson F^+ , proche d'un monoïde commutatif libre, avec 2^n diviseurs de Δ_n .
- Cas (plus compliqué, plus intéressant) d'un hybride de F^+ et du monoïde tresses B_∞^+ (thèse d'Émilie Tesson).

Plan :

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+
 - Une structure de Garside sur H^+

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+
 - Une structure de Garside sur H^+
 - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+
 - Une structure de Garside sur H^+
 - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition: Le monoïde des tresses à n brins est

$$B_n^+ :=$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \rangle^+.$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle^+.$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \end{array} \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes,

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

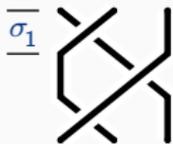
- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

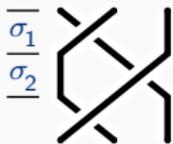
- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \dots \\ | \\ n \end{array} \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

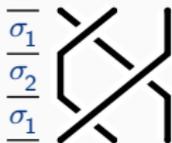
- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & i & i+1 & & & n \\ & & | & \dots & | & \times & | & \dots & | & \\ & & | & & | & & | & & | & \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

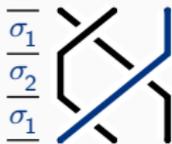
- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



est isotope à



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i & i+1 \\ \diagdown & / \\ / & \diagdown \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \dots \\ | \\ \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagdown \quad / \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \\ | \\ \dots \\ | \\ n \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:



- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:

$$\begin{array}{c} \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \text{est isotope à} \quad \begin{array}{c} \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:

$$\begin{array}{c} \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \text{est isotope à} \quad \begin{array}{c} \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:

$$\begin{array}{c} \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad \text{est isotope à} \quad \begin{array}{c} \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

- Définition: Le **monoïde des tresses à n brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de B_n^+ s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à n brins.

↑
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$:

$$\begin{array}{c} \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \text{est isotope à} \quad \begin{array}{c} \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\}$

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- ↓
- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\}$

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- ↓
- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preccurlyeq \Delta_n\}$.

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.
 $\exists h (gh = \Delta_n)$

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ \uparrow la tresse demi-tour

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ \uparrow \nwarrow la tresse demi-tour

- Δ_1

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

- Δ_1  Δ_2

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

• Δ_1



deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

• Δ_1



deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

• Δ_1



- Proposition : Pour tout n et toute permutation f de $\{1, \dots, n\}$, il existe une et une seule tresse de S_n dont la permutation est f .

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

• Δ_1



• Proposition : Pour tout n et toute permutation f de $\{1, \dots, n\}$, il existe une et une seule tresse de S_n dont la permutation est f .

► Bijection explicite entre S_n et \mathfrak{S}_n ;

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ la tresse demi-tour

• Δ_1



• Proposition : Pour tout n et toute permutation f de $\{1, \dots, n\}$, il existe une et une seule tresse de S_n dont la permutation est f .

► Bijection explicite entre S_n et \mathfrak{S}_n ; en particulier $\text{card}(S_n) = n!$.

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) :

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$*

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$,*

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

- ▶ forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : *Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.

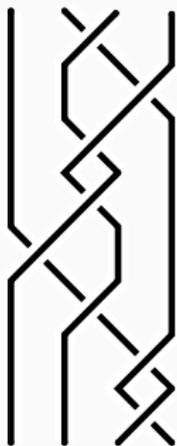
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \dots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \dots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



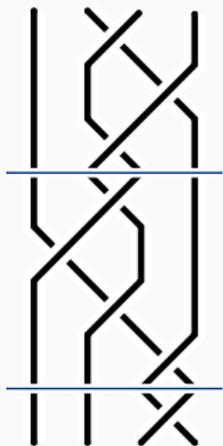
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \dots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \dots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



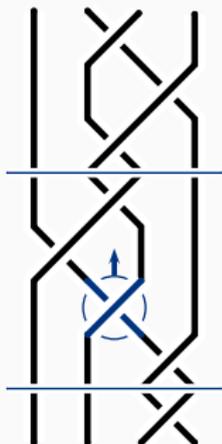
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \dots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \dots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



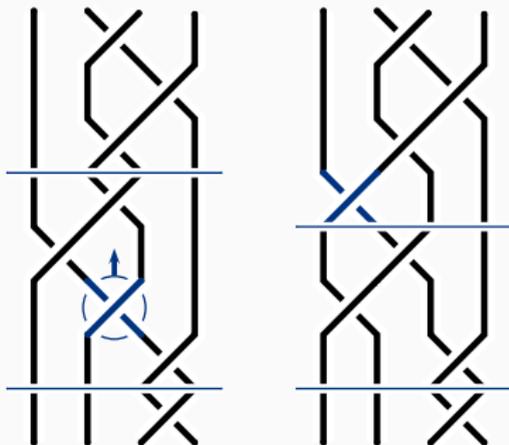
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



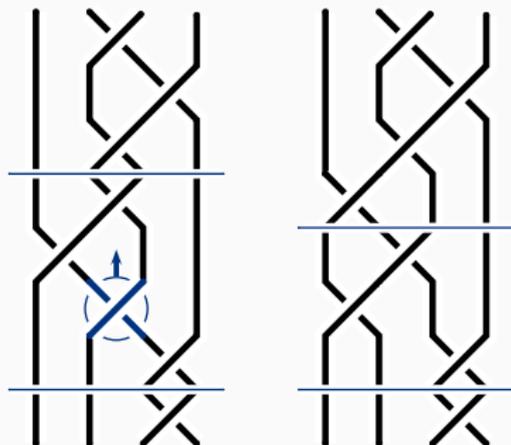
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



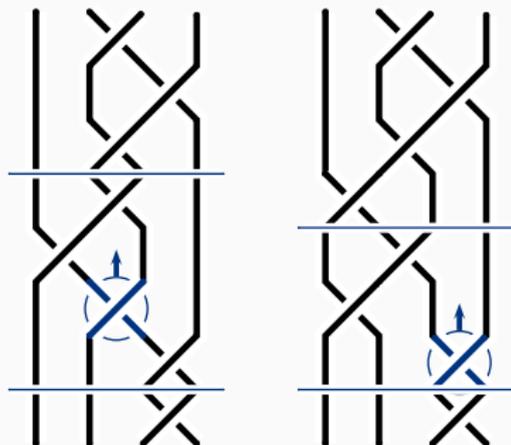
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_j ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_j est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



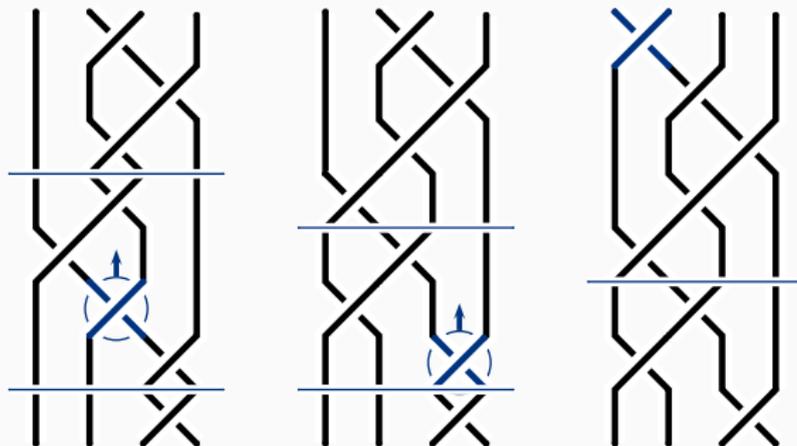
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



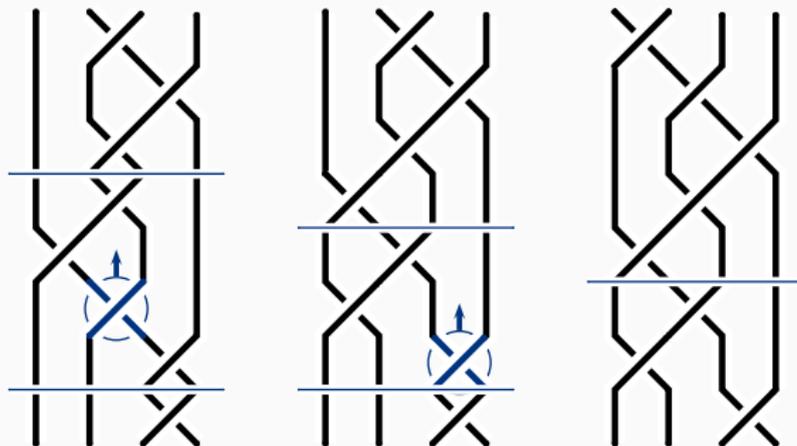
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



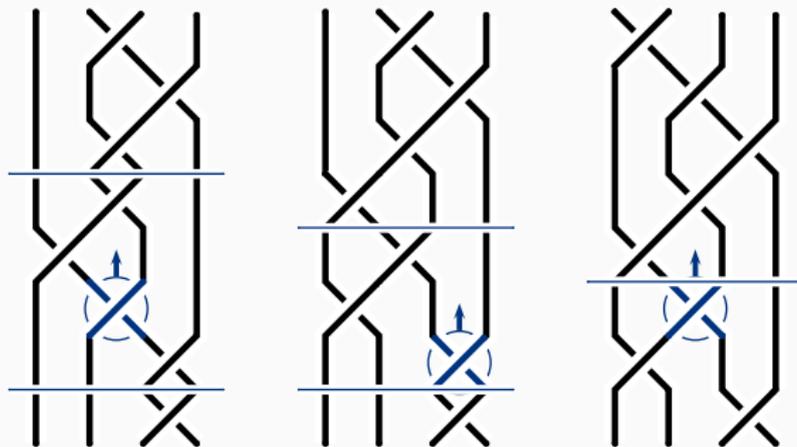
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



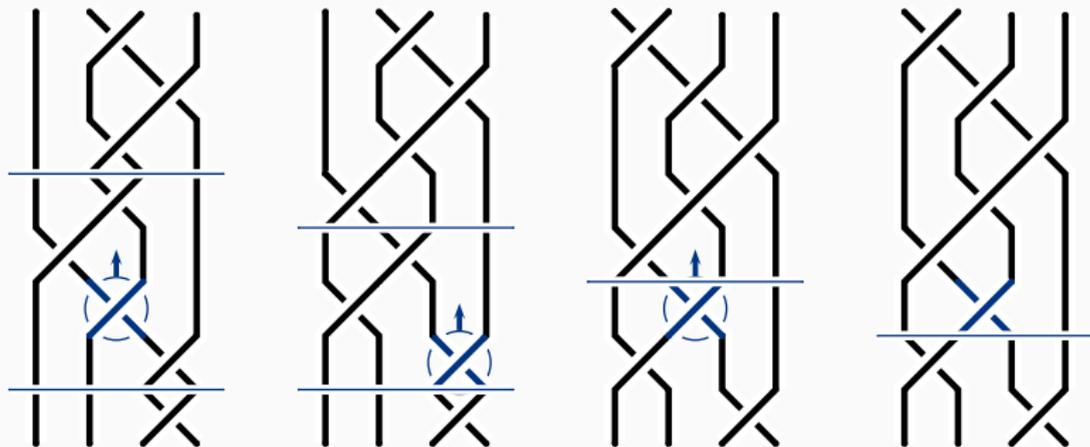
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \dots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \dots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



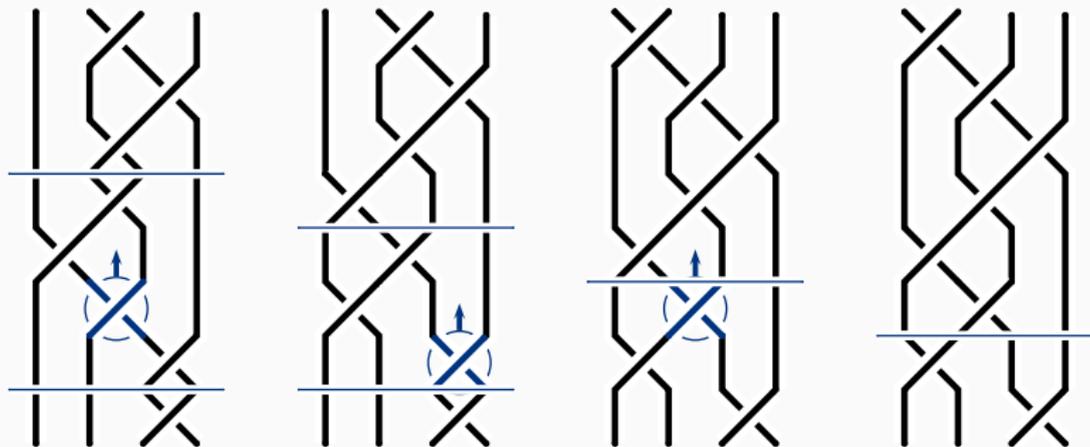
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de B_n^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \dots s_p$ à gauche”
soit “ s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \dots s_p$ appartenant à S_n ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à S_n .

- Exemple: $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$.



- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.
- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\}$

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\}$

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.
 $\exists h (gh = \Delta_n)$

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

- Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

- ▶ En particulier $\text{card}(S_n) = 2^n$.

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

• Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

► En particulier $\text{card}(S_n) = 2^n$.

• Proposition: Tout élément non trivial de M_n a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

• Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

► En particulier $\text{card}(S_n) = 2^n$.

• Proposition: Tout élément non trivial de M_n a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. «aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche»

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

• Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

▶ En particulier $\text{card}(S_n) = 2^n$.

• Proposition: Tout élément non trivial de M_n a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \in S_n (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. «aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche»
soit à nouveau « s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n »

- Soit M_n un monoïde **commutatif libre** de base $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$.

chaque lettre a_i apparaît au plus une fois

- Posons $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$.

$\exists h (gh = \Delta_n)$ le produit $a_1 \cdots a_n$

• Fait : La famille S_n est en bijection avec les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

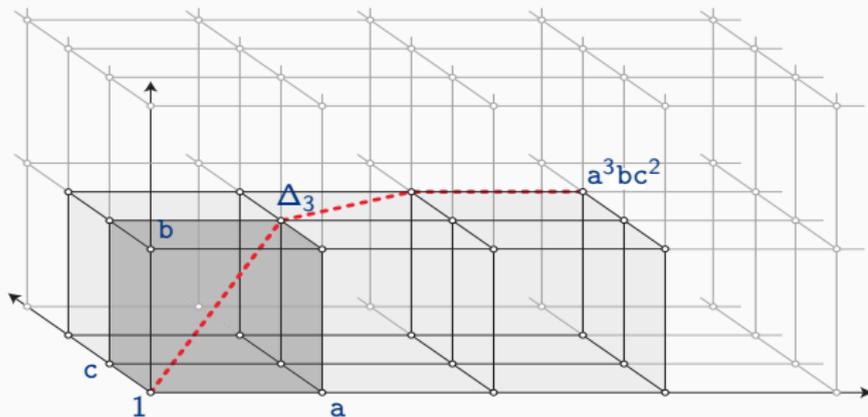
► En particulier $\text{card}(S_n) = 2^n$.

• Proposition: Tout élément non trivial de M_n a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec $s_1, \dots, s_p \in S_n$, $s_p \neq 1$, et

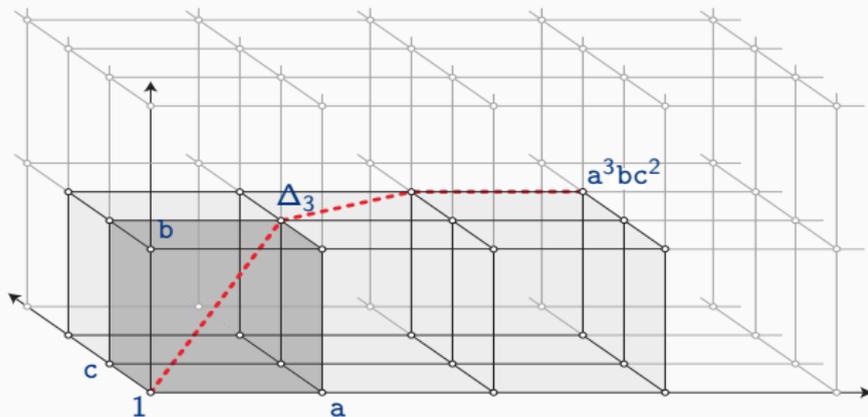
$$\forall s \in S_n (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. «aucun simple multiple à droite propre de s_i ne divise $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ à gauche»
soit à nouveau « s_i est un diviseur à gauche maximal de $s_i s_{i+1} \cdots s_p$ appartenant à S_n »

- Exemple: $NF(a^3bc^2) = abc|ac|a$.



- Exemple: $NF(a^3bc^2) = abc|ac|a$.



Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+
 - Une structure de Garside sur H^+
 - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

► utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté
au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe F est groupe de fractions à droite pour le monoïde F^+ .

↑
le monoïde présenté par $(*)$

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe F est groupe de fractions à droite pour le monoïde F^+ .

↑
le monoïde présenté par (*)

- Proposition : Tout élément de F a une décomposition unique

$$\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_n^{p_n} \tau_n^{-q_n} \dots \tau_2^{-q_2} \tau_1^{-q_1}$$

t.q. $((p_k \neq 0 \text{ et } q_k \neq 0) \text{ entraîne } (p_{k+1} \neq 0) \text{ ou } (q_{k+1} \neq 0))$.

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe F est groupe de fractions à droite pour le monoïde F^+ .

↑
le monoïde présenté par (*)

- Proposition : Tout élément de F a une décomposition unique

$$\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_n^{p_n} \tau_n^{-q_n} \dots \tau_2^{-q_2} \tau_1^{-q_1}$$

t.q. $((p_k \neq 0 \text{ et } q_k \neq 0) \text{ entraîne } (p_{k+1} \neq 0) \text{ ou } (q_{k+1} \neq 0))$.

- Proposition : Le groupe F est finiment présenté.

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe F est groupe de fractions à droite pour le monoïde F^+ .

↑
le monoïde présenté par (*)

- Proposition : Tout élément de F a une décomposition unique

$$\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_n^{p_n} \tau_n^{-q_n} \dots \tau_2^{-q_2} \tau_1^{-q_1}$$

t.q. $((p_k \neq 0 \text{ et } q_k \neq 0) \text{ entraîne } (p_{k+1} \neq 0) \text{ ou } (q_{k+1} \neq 0))$.

- Proposition : Le groupe F est finiment présenté.

- ▶ engendré par τ_1 et τ_2 , car $\tau_n = \tau_2^{\tau_1^{n-1}}$ pour $n \geq 3$.

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe F est groupe de fractions à droite pour le monoïde F^+ .

↑
le monoïde présenté par (*)

- Proposition : Tout élément de F a une décomposition unique

$$\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_n^{p_n} \tau_n^{-q_n} \dots \tau_2^{-q_2} \tau_1^{-q_1}$$

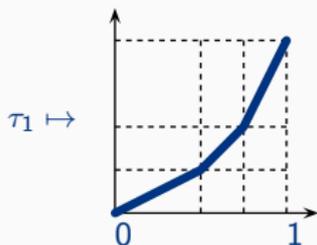
t.q. $((p_k \neq 0 \text{ et } q_k \neq 0) \text{ entraîne } (p_{k+1} \neq 0) \text{ ou } (q_{k+1} \neq 0))$.

- Proposition : Le groupe F est finiment présenté.

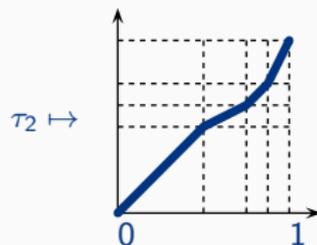
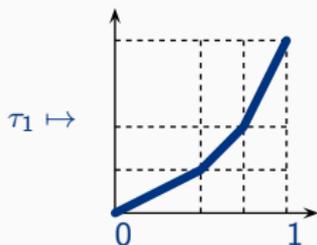
- ▶ engendré par τ_1 et τ_2 , car $\tau_n = \tau_2^{\tau_1^{n-1}}$ pour $n \geq 3$.
- ▶ relations: " $\tau_3^{\tau_2} = \tau_4$ " et " $\tau_4^{\tau_2} = \tau_5$ ", that is, $\tau_2^{\tau_1 \tau_2} = \tau_2^{\tau_1^2}$ and $\tau_2^{\tau_1^2 \tau_2} = \tau_2^{\tau_1^3}$.

- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.

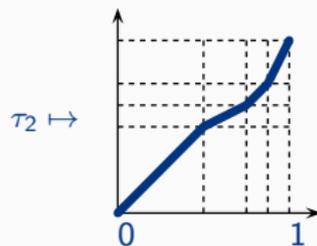
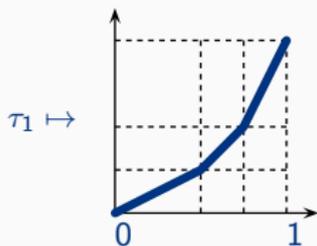
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



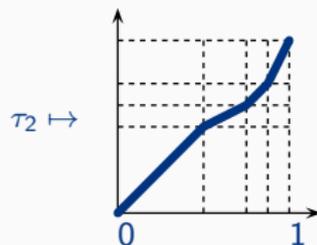
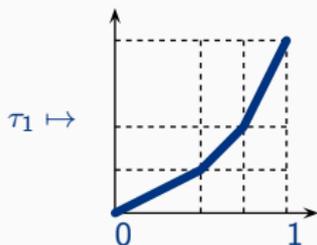
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



aussi représentés comme



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.

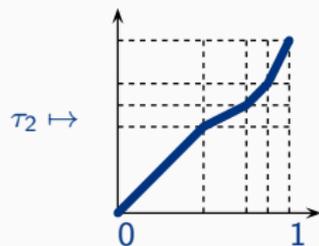
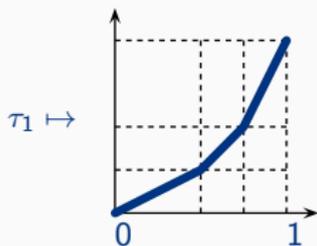


aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:

- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



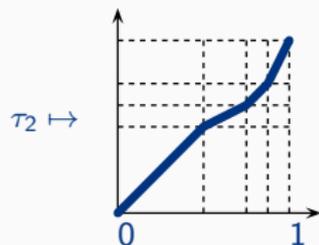
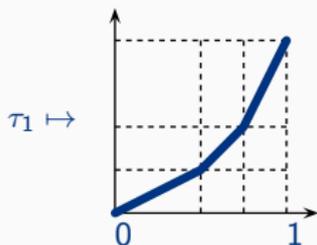
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



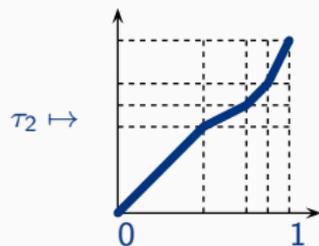
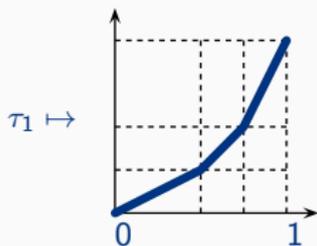
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}.$



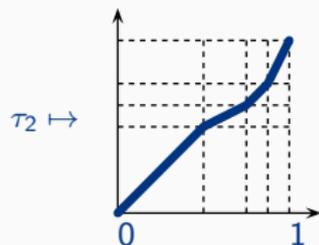
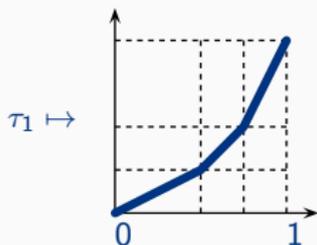
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



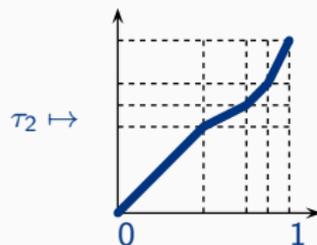
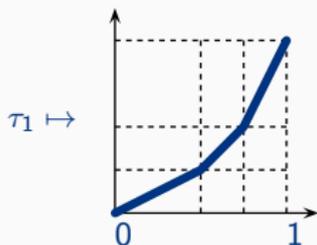
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



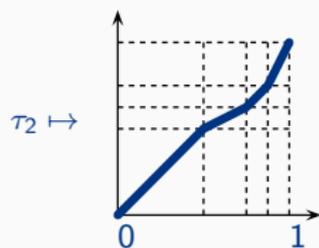
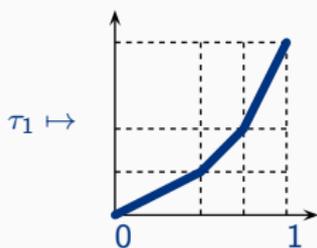
aussi représentés comme



- Un élément de F = une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis:



- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



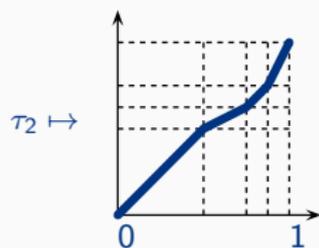
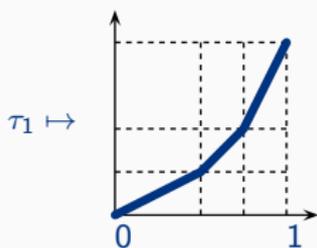
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis:



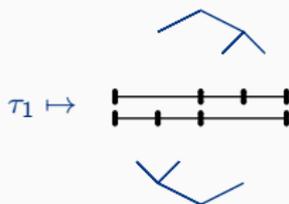
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



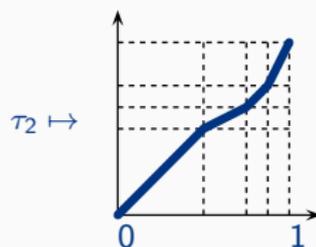
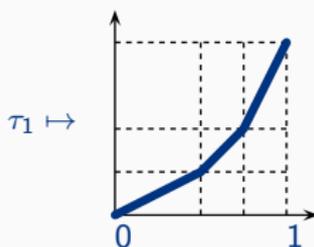
aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis :



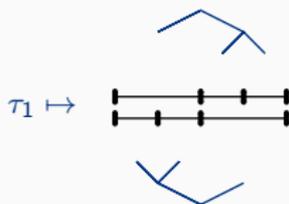
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



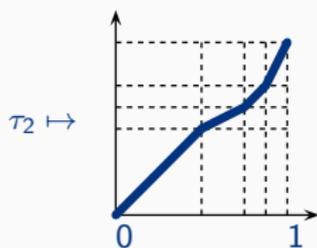
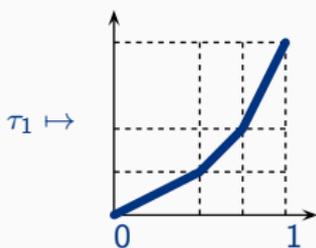
aussi représentés comme



- Un élément de F = une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis :



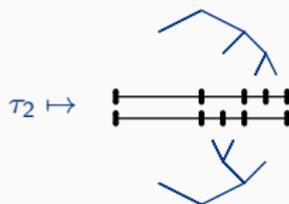
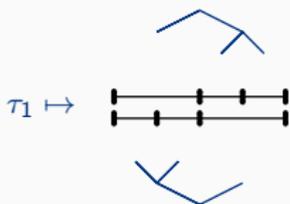
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$.



aussi représentés comme



- Un élément de $F =$ une paire de **décompositions dyadiques** de $[0, 1]$:
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis:



- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).

- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe F n'a pas de sous-groupe libre de rang ≥ 2 .*

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).
- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe F n'a pas de sous-groupe libre de rang ≥ 2 .*
 - ▶ Tout sous-groupe abélien de F inclut une copie de \mathbb{Z}^∞ .

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).
- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe F n'a pas de sous-groupe libre de rang ≥ 2 .*
 - ▶ Tout sous-groupe abélien de F inclut une copie de \mathbb{Z}^∞ .
- Théorème (Guba 2005) : *La fonction de Dehn de F est quadratique.*

$$\Phi(n) := \sup_{\uparrow} \{\text{aire}(w) \mid w \text{ de longueur } n \text{ représentant } 1 \text{ dans } F\}$$

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).
- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe F n'a pas de sous-groupe libre de rang ≥ 2 .*
 - ▶ Tout sous-groupe abélien de F inclut une copie de \mathbb{Z}^∞ .
- Théorème (Guba 2005) : *La fonction de Dehn de F est quadratique.*

$$\Phi(n) := \sup_{\uparrow} \{\text{aire}(w) \mid w \text{ de longueur } n \text{ représentant } 1 \text{ dans } F\}$$
- Question 1 (Gersten) : Est-ce F est **automatique** ? (F n'est pas hyperbolique)

- Théorème : *Le groupe $[F, F]$ est simple.*
 - ▶ Un sous-groupe distingué de $[F, F]$ contient tous les commutateurs
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).
- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe F n'a pas de sous-groupe libre de rang ≥ 2 .*
 - ▶ Tout sous-groupe abélien de F inclut une copie de \mathbb{Z}^∞ .
- Théorème (Guba 2005) : *La fonction de Dehn de F est quadratique.*
$$\Phi(n) := \sup_{\uparrow} \{ \text{aire}(w) \mid w \text{ de longueur } n \text{ représentant } 1 \text{ dans } F \}$$
- Question 1 (Gersten) : Est-ce F est **automatique** ? (F n'est pas hyperbolique)
- Question 2 (Geoghegan) : Est-ce F est **moyennable** ?

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcm à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*
deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*

deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
(par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcm à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcm à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
 - ↑
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcm à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $F^+ :=$ éléments de $\bigcup_{n \geq 1} S_n$.

- Lemme : Le monoïde F^+ est simplifiable
 et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $F^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

• Proposition : Tout élément non trivial de F^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

- Lemme : *Le monoïde F^+ est simplifiable et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.*
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $F^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

• Proposition : *Tout élément non trivial de F^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et*

$$\forall s \text{ simple, } (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

- Lemme : Le monoïde F^+ est simplifiable
 et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche
 (par ex. : τ_1 et τ_2 n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $F^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

• Proposition : Tout élément non trivial de F^+ a une unique décomposition $s_1 | \cdots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

► « Les éléments simples forment une **famille de Garside** dans F^+ ».

- Quelle est la structure des simples de F^+ ?

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. □

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. □

► « expression **réduite** »

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*
Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. □
 - ▶ « expression **réduite** »
- Proposition : *Un élément de F^+ divise à gauche Δ_n ssi son expression réduite est de la forme $\tau_{i_1} \cdots \tau_{i_\ell}$ avec $n > i_1 > \cdots > i_\ell$.*

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. □

► « expression **réduite** »

- Proposition : *Un élément de F^+ divise à gauche Δ_n ssi son expression réduite est de la forme $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_\ell}$ avec $n > i_1 > \dots > i_\ell$.*

Démonstration: Il existe une bijection explicite entre les expressions de Δ_n et les permutations de $\{1, \dots, n-1\}$:

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. \square

► « expression **réduite** »

- Proposition : *Un élément de F^+ divise à gauche Δ_n ssi son expression réduite est de la forme $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_\ell}$ avec $n > i_1 > \dots > i_\ell$.*

Démonstration: Il existe une bijection explicite entre les expressions de Δ_n et les permutations de $\{1, \dots, n-1\}$: analogue à \mathbb{N}^{n-1} en voyant $\tau_i \tau_{j+1} = \tau_j \tau_i$ comme une commutation tordue. \square

- Quelle est la structure des simples de F^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de F^+ a une unique expression sans $\tau_i \tau_j$ avec $j \geq i + 2$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$ avec $i \geq 1$ et $j \geq i + 1$ est convergent. \square

► « expression **réduite** »

- Proposition : *Un élément de F^+ divise à gauche Δ_n ssi son expression réduite est de la forme $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_\ell}$ avec $n > i_1 > \dots > i_\ell$.*

Démonstration: Il existe une bijection explicite entre les expressions de Δ_n et les permutations de $\{1, \dots, n-1\}$: analogue à \mathbb{N}^{n-1} en voyant $\tau_i \tau_{j+1} = \tau_j \tau_i$ comme une commutation tordue. \square

► $\text{card}(S_n) = 2^{n-1}$.

Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
 - Monoïdes de tresses
 - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson F^+
 - Le groupe de Thompson F
 - Le monoïde de Thompson F^+
 - Une structure de Garside sur F^+
- 3. Un hybride de F^+ et B_∞^+
 - Le monoïde H^+
 - Une structure de Garside sur H^+
 - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition : On pose

$$H^+ := \langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \rangle^+.$$

- Définition : On pose

$$H^+ := \langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \text{ pour } j \geq i + 2 \rangle^+.$$

- Définition : On pose

$$H^+ := \langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \rangle^+ .$$

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.
- Fait : Il existe un homomorphisme surjectif de H^+ dans F^+ .

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.
- Fait : Il existe un homomorphisme surjectif de H^+ dans F^+ .

Démonstration : On a $\tau_i \tau_{i+1} \tau_{i+3} = \tau_i \tau_{i+2} \tau_{i+1} = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$ dans F^+ ,
donc envoyer θ_i sur τ_i induit un homomorphisme. □

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i + 2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i + 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.
- Fait : Il existe un homomorphisme surjectif de H^+ dans F^+ .

Démonstration : On a $\tau_i \tau_{i+1} \tau_{i+3} = \tau_i \tau_{i+2} \tau_{i+1} = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$ dans F^+ ,
donc envoyer θ_i sur τ_i induit un homomorphisme. \square

- Fait : Il existe un homomorphisme de H^+ dans les surjections de \mathbb{N} dans lui-même.

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i+2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i+1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de B_∞^+ à la façon dont F^+ est version tordue de $\mathbb{N}^{(\infty)}$:

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.
- Fait : Il existe un homomorphisme surjectif de H^+ dans F^+ .

Démonstration : On a $\tau_i \tau_{i+1} \tau_{i+3} = \tau_i \tau_{i+2} \tau_{i+1} = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$ dans F^+ ,
donc envoyer θ_i sur τ_i induit un homomorphisme. □

- Fait : Il existe un homomorphisme de H^+ dans les surjections de \mathbb{N} dans lui-même.

Démonstration : Envoyer θ_i sur la surjection

$$\tilde{\theta}_i : k \mapsto \begin{cases} k & \text{pour } k \leq i+1, \\ k-2 & \text{pour } k = i+2, \\ k-1 & \text{pour } k \geq i+3. \end{cases}$$

□

- Proposition : *Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.*

- Proposition : Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Proposition : Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.

- Proposition : Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de a à celle de $a\theta_i$ \square

- Proposition : *Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : *Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.*

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de a à celle de $a\theta_i$ \square

- Proposition : *Le monoïde H^+ est simplifiable à gauche et admet des ppcm à droite conditionnels.*

- Proposition : *Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : *Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.*

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de a à celle de $a\theta_i$. \square

- Proposition : *Le monoïde H^+ est simplifiable à gauche et admet des ppcm à droite conditionnels.*

Démonstration : Appliquer la technique du «retournement de facteur». \square

- Proposition : *Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : *Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.*

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de a à celle de $a\theta_i$ \square

- Proposition : *Le monoïde H^+ est simplifiable à gauche et admet des ppcm à droite conditionnels.*

Démonstration : Appliquer la technique du «retournement de facteur». \square

- Remarques : Il y a des éléments sans multiple à droite commun, par ex. θ_2 et $\theta_1\theta_3$.

- Proposition : *Tout élément de H^+ a une unique expression sans $\theta_i\theta_j$ avec $j \geq i + 3$ ni $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$.*

Démonstration : Le système de réécriture sur $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$ défini par les règles $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$ pour $i \geq 1$ et $j \geq i + 2$ et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$ est convergent. \square

- Corollaire : *Si H^+ est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.*

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de a à celle de $a\theta_i$ \square

- Proposition : *Le monoïde H^+ est simplifiable à gauche et admet des ppcm à droite conditionnels.*

Démonstration : Appliquer la technique du «retournement de facteur». \square

- Remarques : Il y a des éléments sans multiple à droite commun, par ex. θ_2 et $\theta_1\theta_3$.
On ne sait rien d'éventuels ppcm à gauche.

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir $\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir
$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2} \theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3} \theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2 \theta_3 \cdot \theta_1 \theta_2.$$
- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2} \theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3} \theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2 \theta_3 \cdot \theta_1 \theta_2.$$

- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.
(ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2} \theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3} \theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2 \theta_3 \cdot \theta_1 \theta_2.$$

- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.
(ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
(iii) éléments **simples** de $H^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2.$$

- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $H^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

- Proposition : Tout élément non trivial de H^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i \prec s \Rightarrow s \nprec s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2.$$

- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $H^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

- Proposition : Tout élément non trivial de H^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

- Attention ! La forme normale existe, MAIS certaines propriétés des cas précédents sont en défaut car S non clos par diviseur à droite (pas de « règle du domino »).

- Lemme : Les éléments $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ admettent un ppcm à droite dans H^+ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2.$$

- Définition : (i) $\Delta_n :=$ ppcm à droite de $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$.
 (ii) $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$
 (iii) éléments **simples** de $H^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$.

- Proposition : Tout élément non trivial de H^+ a une unique décomposition $s_1 | \dots | s_p$ avec s_1, \dots, s_p simples, $s_p \neq 1$, et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

- Attention ! La forme normale existe, MAIS certaines propriétés des cas précédents sont en défaut car S non clos par diviseur à droite (pas de « règle du domino »).

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \theta_1\theta_2\theta_4 (= \Delta_3) \text{ est simple, mais } \theta_2\theta_4 \text{ ne l'est pas} \end{array}$$

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
(type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 - (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?
- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 - (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,
 - (type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

• Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

• Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,

(type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,

(type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

• Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

• Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,

(type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,

(type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

↑

$\Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1}$

• Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

• Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,

(type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,

(type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

↑

$\Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1}$

• Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

• Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

• Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,

(type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,

(type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,

(type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

↑

$\Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1}$

• Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de Δ_n et de $\Delta_{n+0.5}$. □

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 - (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,
 - (type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1} \end{array}$$

- Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de Δ_n et de $\Delta_{n+0.5}$. \square

- Faits : $S_{n,\ell}^0 \leftrightarrow S_{n-1,\ell}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,
 (type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1} \end{array}$$

- Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de Δ_n et de $\Delta_{n+0.5}$. \square

- Faits : $S_{n,\ell}^0 \leftrightarrow S_{n-1,\ell}$, $S_{n,\ell}^I \leftrightarrow S_{n-1,\ell-1}$,

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 - (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 - (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preccurlyeq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,
 - (type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preccurlyeq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Delta_n \preccurlyeq \Delta_{n+0.5} \preccurlyeq \Delta_{n+1} \end{array}$$

- Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de Δ_n et de $\Delta_{n+0.5}$. \square

- Faits : $S_{n,\ell}^0 \leftrightarrow S_{n-1,\ell}$, $S_{n,\ell}^I \leftrightarrow S_{n-1,\ell-1}$, $S_{n,\ell}^{II_1} \sqcup S_{n,\ell}^{II_2} \leftrightarrow S_{n-1,\ell-2}$.

- Question : Comment sont faits les simples de H^+ ? Combien y en a-t-il ?

- Définition : $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preceq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$,
 (type 0) $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$,
 (type I) $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$,
 (type II₁) $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preceq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$,
 (type II₂) $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$,

avec $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Delta_n \preceq \Delta_{n+0.5} \preceq \Delta_{n+1} \end{array}$$

- Proposition : Les ensembles $S_{n,\ell}^0$, $S_{n,\ell}^I$, $S_{n,\ell}^{II_1}$, et $S_{n,\ell}^{II_2}$ partitionnent $S_{n,\ell}$.

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de Δ_n et de $\Delta_{n+0.5}$. \square

- Faits : $S_{n,\ell}^0 \leftrightarrow S_{n-1,\ell}$, $S_{n,\ell}^I \leftrightarrow S_{n-1,\ell-1}$, $S_{n,\ell}^{II_1} \sqcup S_{n,\ell}^{II_2} \leftrightarrow S_{n-1,\ell-2}$.
 ▶ $\text{card}(S_{n,\ell}) = \text{card}(S_{n-1,\ell}) + \text{card}(S_{n-1,\ell-1}) + \text{card}(S_{n-1,\ell-2})$.

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

1 1

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

	1	1		
1	2	2	1	

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

		1	1			
	1	2	2	1		
1	3	5	5	3	1	

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

			1	1				
		1	2	2	1			
	1	3	5	5	3	1		
1	4	9	13	13	9	4	1	

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1	1				
			1	2	2	1			
		1	3	5	5	3	1		
	1	4	9	13	13	9	4	1	
1	5	14	26	35	35	26	14	5	1

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1	1					
			1	2	2	1				
		1	3	5	5	3	1			
	1	4	9	13	13	9	4	1		
1	5	14	26	35	35	26	14	5	1	

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1	1					
			1	2	2	1				
			1	3	5	5	3	1		
		1	4	9	13	13	9	4	1	
1	5	14	26	35	35	26	14	5	1	

(\approx suite 005773 de OEIS, «animaux dirigés»)

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1	1								
				1	2	2	1						
				1	3	5	5	3	1				
				1	4	9	13	13	9	4	1		
				1	5	14	26	35	35	26	14	5	1

(\approx suite 005773 de OEIS, «animaux dirigés»)

- Proposition : Pour tout n , on a $\text{card}(S_n) = 2 \cdot 3^{n-2}$.

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1		1				
			1	2	2	1				
		1	3	5	5	3	1			
	1	4	9	13	13	9	4	1		
1	5	14	26	35	35	26	14	5	1	

(\approx suite 005773 de OEIS, «animaux dirigés»)

- Proposition : Pour tout n , on a $\text{card}(S_n) = 2 \cdot 3^{n-2}$.

- Proposition : Un élément de H^+ est simple ssi son expression réduite évite les facteurs θ_i^2 , $\theta_i\theta_{i+2}$, $\theta_i\theta_{i+1}\theta_i$, et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+2}$.

- Valeurs de $\text{card}(S_{n,\ell})$, lignes correspondant à n , avec ℓ croissant :

				1		1				
			1	2	2	1				
		1	3	5	5	3	1			
	1	4	9	13	13	9	4	1		
1	5	14	26	35	35	26	14	5	1	

(\approx suite 005773 de OEIS, «animaux dirigés»)

- Proposition : Pour tout n , on a $\text{card}(S_n) = 2 \cdot 3^{n-2}$.

- Proposition : Un élément de H^+ est simple ssi son expression réduite évite les facteurs θ_i^2 , $\theta_i\theta_{i+2}$, $\theta_i\theta_{i+1}\theta_i$, et $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+2}$.

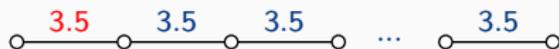
Démonstration : Induction sur n , (très) délicate. □

- Question : Le monoïde H^+ se plonge-t-il dans le groupe H ?

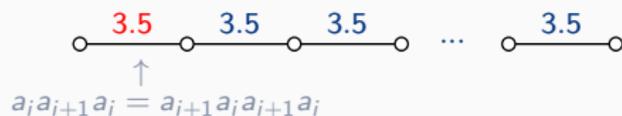
↑
le groupe de présentation...

- Définition (AI-monoïdes ou «monoïdes d'Artin-Krammer») :

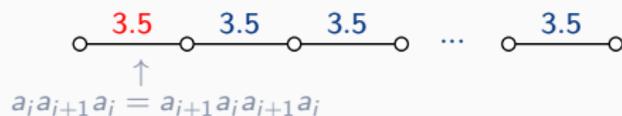
- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : $A_n :=$ monoïde associé au graphe de Dynkin



- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : A_n := monoïde associé au graphe de Dynkin

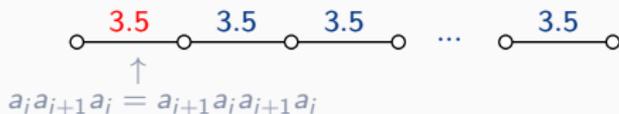


- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : $A_n :=$ monoïde associé au graphe de Dynkin



► relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

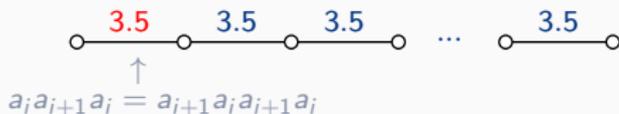
- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : $A_n :=$ monoïde associé au graphe de Dynkin



▶ relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

- Proposition (**Krammer**) : Le monoïde A_n est simplifiable à gauche et possède un élément de Garside Δ_n .

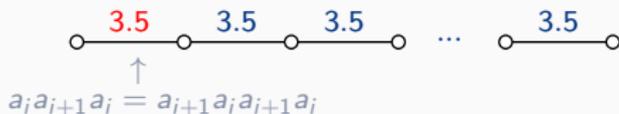
- Définition (AI-monoïdes ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : A_n := monoïde associé au graphe de Dynkin



▶ relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

- Proposition (Krammer) : Le monoïde A_n est simplifiable à gauche et possède un élément de Garside Δ_n .
- Proposition (Ffitch) : Le nombre de diviseurs à gauche de Δ_n dans A_n est $\text{Fibo}(2n)$.

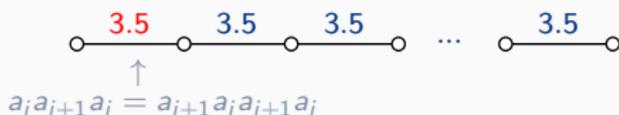
- Définition (AI-monoïdes ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : $A_n :=$ monoïde associé au graphe de Dynkin



► relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

- Proposition (Krammer) : Le monoïde A_n est simplifiable à gauche et possède un élément de Garside Δ_n .
- Proposition (Ffitch) : Le nombre de diviseurs à gauche de Δ_n dans A_n est $\text{Fibo}(2n)$.
- Références :
 - D. Krammer, *An asymmetric generalisation of Artin monoids*, Groups Complexity Cryptology 5 (2013) 141-168

- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») : A_n := monoïde associé au graphe de Dynkin



► relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

- Proposition (**Krammer**) : Le monoïde A_n est simplifiable à gauche et possède un élément de Garside Δ_n .
- Proposition (**Ffitch**) : Le nombre de diviseurs à gauche de Δ_n dans A_n est **Fibo(2n)**.
- Références :
 - **D. Krammer**, *An asymmetric generalisation of Artin monoids*, Groups Complexity Cryptology 5 (2013) 141-168
 - **E. Ffitch**, *Generalisations of Artin monoids and Coxeter monoids*, PhD university of Warwick, 2019