



## Combinatoire de Garside pour le monoïde de Thompson et un hybride avec le monoïde des tresses

Patrick Dehornoy

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme  
Université de Caen

Amiens, février 2019

- Comme les tresses  $\Delta_n$  dans le monoïde  $B_\infty^+$ , des éléments de Garside dans un monoïde  $M$  sont des éléments  $\Delta_n$  dont les diviseurs donnent une forme normale canonique pour les éléments de  $M$ .
- Cas du monoïde de Thompson  $F^+$ , proche d'un monoïde commutatif libre, avec  $2^n$  diviseurs de  $\Delta_n$ .
- Cas (plus compliqué, plus intéressant) d'un hybride de  $F^+$  et du monoïde tresses  $B_\infty^+$  (thèse d'Émilie Tesson).

## Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
  - Monoïdes de tresses
  - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson  $F^+$ 
  - Le groupe de Thompson  $F$
  - Le monoïde de Thompson  $F^+$
  - Une structure de Garside sur  $F^+$
- 3. Un hybride de  $F^+$  et  $B_\infty^+$ 
  - Le monoïde  $H^+$
  - Une structure de Garside sur  $H^+$
  - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

## Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
  - Monoïdes de tresses
  - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson  $F^+$ 
  - Le groupe de Thompson  $F$
  - Le monoïde de Thompson  $F^+$
  - Une structure de Garside sur  $F^+$
- 3. Un hybride de  $F^+$  et  $B_\infty^+$ 
  - Le monoïde  $H^+$
  - Une structure de Garside sur  $H^+$
  - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition: Le **monoïde des tresses à  $n$  brins** est

$$B_n^+ := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad \text{pour } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- Théorème (Artin 1926, Garside 1969): Par la correspondance

$$\sigma_i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad i \quad i+1 \qquad \qquad \qquad n \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \\ | \quad \dots \quad | \quad \times \quad | \quad \dots \quad | \end{array}$$

et la concaténation (empilement) des diagrammes, les éléments de  $B_n^+$  s'interprètent comme classe d'isotopie des diagrammes de tresse à  $n$  brins.

↑  
déformation continue de l'espace 3D ambiant

- Interprétation topologique de la relation de tresse  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ :

$$\begin{array}{c} \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \quad \text{est isotope à} \quad \begin{array}{c} \overline{\sigma_2} \\ \overline{\sigma_1} \\ \overline{\sigma_2} \end{array} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

deux brins quelconques se croisent au plus une fois

- Soit  $S_n := \{\text{tresses à } n \text{ brins simples}\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$ .

$\exists h (gh = \Delta_n)$  la tresse demi-tour

•  $\Delta_1$



• Proposition : Pour tout  $n$  et toute permutation  $f$  de  $\{1, \dots, n\}$ , il existe une et une seule tresse de  $S_n$  dont la permutation est  $f$ .

► Bijection explicite entre  $S_n$  et  $\mathfrak{S}_n$  ; en particulier  $\text{card}(S_n) = n!$ .

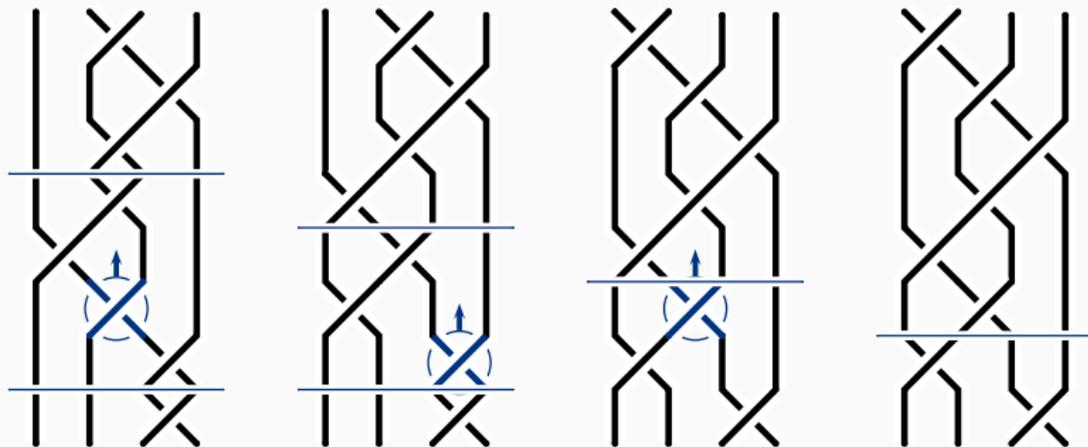
- Théorème (Adyan 1984, Morton–El-Rifai 1988) : Tout élément non trivial de  $B_n^+$  a une unique décomposition  $s_1 | \dots | s_p$  avec  $s_1, \dots, s_p \in S_n$ ,  $s_p \neq 1$ , et

$$\forall s \in S_n (s_j < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

i.e.. “aucun simple multiple à droite propre de  $s_i$  ne divise  $s_i s_{i+1} \dots s_p$  à gauche”  
soit “ $s_i$  est un diviseur à gauche maximal de  $s_i s_{i+1} \dots s_p$  appartenant à  $S_n$ ”

► forme normale **gloutonne** (ou greedy, ou de Garside) par rapport à  $S_n$ .

- Exemple:  $NF(\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 | \sigma_1 \sigma_3$ .



- Soit  $M_n$  un monoïde **commutatif libre** de base  $A_n := \{a_1, \dots, a_n\} (\simeq (\mathbb{N}, +)^n)$ .

chaque lettre  $a_i$  apparaît au plus une fois

- Posons  $S_n := \{\text{éléments simples de } M\} = \{g \in B_n^+ \mid g \preceq \Delta_n\}$ .

$\exists h (gh = \Delta_n)$  le produit  $a_1 \cdots a_n$

• Fait : La famille  $S_n$  est en bijection avec les sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$ .

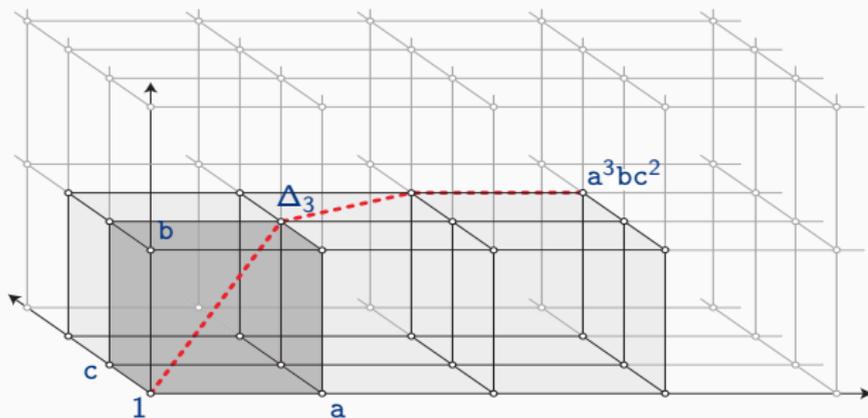
► En particulier  $\text{card}(S_n) = 2^n$ .

• Proposition: Tout élément non trivial de  $M_n$  a une unique décomposition  $s_1 | \cdots | s_p$  avec  $s_1, \dots, s_p \in S_n$ ,  $s_p \neq 1$ , et

$$\forall s \in S_n (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

i.e.. «aucun simple multiple à droite propre de  $s_i$  ne divise  $s_i s_{i+1} \cdots s_p$  à gauche»  
soit à nouveau « $s_i$  est un diviseur à gauche maximal de  $s_i s_{i+1} \cdots s_p$  appartenant à  $S_n$ »

- Exemple:  $NF(a^3bc^2) = abc|ac|a$ .



## Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
  - Monoïdes de tresses
  - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson  $F^+$ 
  - Le groupe de Thompson  $F$
  - Le monoïde de Thompson  $F^+$
  - Une structure de Garside sur  $F^+$
- 3. Un hybride de  $F^+$  et  $B_\infty^+$ 
  - Le monoïde  $H^+$
  - Une structure de Garside sur  $H^+$
  - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition (Richard Thompson, 1965) :

$$F := \langle \tau_1, \tau_2, \dots \mid \tau_j \tau_i = \tau_i \tau_{j+1} \text{ for } j \geq i + 1 \rangle. \quad (*)$$

- ▶ utilisé pour construire un exemple de groupe finiment présenté au problème de mot indécidable

- Fait : Le groupe  $F$  est groupe de fractions à droite pour le monoïde  $F^+$ .

↑  
le monoïde présenté par (\*)

- Proposition : Tout élément de  $F$  a une décomposition unique

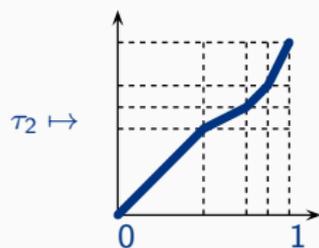
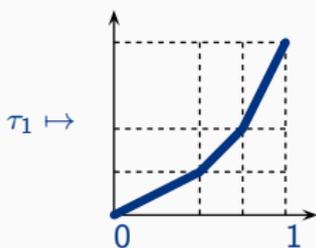
$$\tau_1^{p_1} \tau_2^{p_2} \dots \tau_n^{p_n} \tau_n^{-q_n} \dots \tau_2^{-q_2} \tau_1^{-q_1}$$

t.q.  $((p_k \neq 0 \text{ et } q_k \neq 0) \text{ entraîne } (p_{k+1} \neq 0) \text{ ou } (q_{k+1} \neq 0))$ .

- Proposition : Le groupe  $F$  est finiment présenté.

- ▶ engendré par  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , car  $\tau_n = \tau_2^{\tau_1^{n-1}}$  pour  $n \geq 3$ .
- ▶ relations: " $\tau_3^{\tau_2} = \tau_4$ " et " $\tau_4^{\tau_2} = \tau_5$ ", that is,  $\tau_2^{\tau_1 \tau_2} = \tau_2^{\tau_1^2}$  and  $\tau_2^{\tau_1^2 \tau_2} = \tau_2^{\tau_1^3}$ .

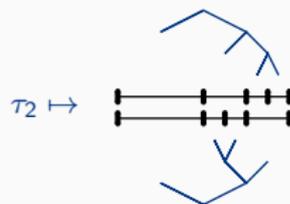
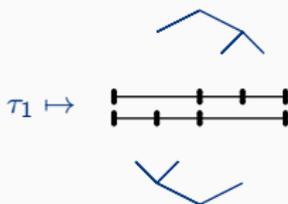
- $F \simeq \{ \text{homéomorphismes croissants affines par morceaux de } [0, 1] \text{ avec pentes de la forme } 2^k \text{ et discontinuités de la dérivées dyadiques} \}$ .



aussi représentés comme



- Un élément de  $F =$  une paire de **décompositions dyadiques** de  $[0, 1]$  :  
= une paire d'**arbres binaires enracinés** finis :



- Théorème : *Le groupe  $[F, F]$  est simple.*
  - ▶ Un sous-groupe distingué de  $[F, F]$  contient tous les commutateurs  
(= homéomorphismes de pente 1 près de 0 et de 1).
- Théorème (Brin–Squier, 1985) : *Le groupe  $F$  n'a pas de sous-groupe libre de rang  $\geq 2$ .*
  - ▶ Tout sous-groupe abélien de  $F$  inclut une copie de  $\mathbb{Z}^\infty$ .
- Théorème (Guba 2005) : *La fonction de Dehn de  $F$  est quadratique.*

$$\Phi(n) := \sup_{\uparrow} \{\text{aire}(w) \mid w \text{ de longueur } n \text{ représentant } 1 \text{ dans } F\}$$
- Question 1 (Gersten) : Est-ce  $F$  est **automatique** ? ( $F$  n'est pas hyperbolique)
- Question 2 (Geoghegan) : Est-ce  $F$  est **moyennable** ?

- Lemme : Le monoïde  $F^+$  est simplifiable  
 et admet des ppcms à droite, et des ppcm conditionnels à gauche.  
 deux éléments qui ont un multiple à gauche commun ont un ppcm à gauche  
 (par ex. :  $\tau_1$  et  $\tau_2$  n'ont pas de multiple à gauche commun)
- Définition : (i)  $\Delta_n :=$  ppcm à droite de  $\tau_1, \dots, \tau_{n-1} = \tau_{n-1} \cdots \tau_2 \tau_1$ .  
 (ii)  $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$   
 (iii) éléments **simples** de  $F^+ :=$  éléments de  $\bigcup_{n \geq 1} S_n$ .

• Proposition : Tout élément non trivial de  $F^+$  a une unique décomposition  $s_1 | \cdots | s_p$  avec  $s_1, \dots, s_p$  simples,  $s_p \neq 1$ , et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i < s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \cdots s_p).$$

► « Les éléments simples forment une **famille de Garside** dans  $F^+$  ».

- Quelle est la structure des simples de  $F^+$  ? Combien y en a-t-il ?
- Lemme : *Tout élément de  $F^+$  a une unique expression sans  $\tau_i \tau_j$  avec  $j \geq i + 2$ .*

Démonstration : Le système de réécriture sur  $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}^*$  défini par les règles  $\tau_i \tau_{j+1} \rightarrow \tau_j \tau_i$  avec  $i \geq 1$  et  $j \geq i + 1$  est convergent.  $\square$

► « expression **réduite** »

- Proposition : *Un élément de  $F^+$  divise à gauche  $\Delta_n$  ssi son expression réduite est de la forme  $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_\ell}$  avec  $n > i_1 > \dots > i_\ell$ .*

Démonstration: Il existe une bijection explicite entre les expressions de  $\Delta_n$  et les permutations de  $\{1, \dots, n-1\}$  : analogue à  $\mathbb{N}^{n-1}$  en voyant  $\tau_i \tau_{j+1} = \tau_j \tau_i$  comme une commutation tordue.  $\square$

►  $\text{card}(S_n) = 2^{n-1}$ .

## Plan :

- 1. Deux structures de Garside classiques
  - Monoïdes de tresses
  - Monoïdes commutatifs libres
- 2. Le monoïde de Thompson  $F^+$ 
  - Le groupe de Thompson  $F$
  - Le monoïde de Thompson  $F^+$
  - Une structure de Garside sur  $F^+$
- 3. Un hybride de  $F^+$  et  $B_\infty^+$ 
  - Le monoïde  $H^+$
  - Une structure de Garside sur  $H^+$
  - Les monoïdes «d'Artin-Krammer»

- Définition : On pose

$$H^+ := \left\langle \theta_1, \theta_2, \dots \mid \begin{array}{l} \theta_j \theta_i = \theta_i \theta_{j+1} \quad \text{pour } j \geq i+2 \\ \theta_j \theta_i \theta_j = \theta_i \theta_j \theta_{i+3} \quad \text{pour } j = i+1 \end{array} \right\rangle^+.$$

- ▶ version tordue de  $B_\infty^+$  à la façon dont  $F^+$  est version tordue de  $\mathbb{N}^{(\infty)}$  :

$$\ll \frac{H^+}{B_\infty^+} = \frac{F^+}{\mathbb{N}^{(\infty)}} \gg$$

- La valeur « $i+3$ » dans la présentation est la seule garantissant des bonnes propriétés.
- Fait : Il existe un homomorphisme surjectif de  $H^+$  dans  $F^+$ .

Démonstration : On a  $\tau_i \tau_{i+1} \tau_{i+3} = \tau_i \tau_{i+2} \tau_{i+1} = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$  dans  $F^+$ ,  
donc envoyer  $\theta_i$  sur  $\tau_i$  induit un homomorphisme. □

- Fait : Il existe un homomorphisme de  $H^+$  dans les surjections de  $\mathbb{N}$  dans lui-même.

Démonstration : Envoyer  $\theta_i$  sur la surjection

$$\tilde{\theta}_i : k \mapsto \begin{cases} k & \text{pour } k \leq i+1, \\ k-2 & \text{pour } k = i+2, \\ k-1 & \text{pour } k \geq i+3. \end{cases}$$

□

- Proposition : *Tout élément de  $H^+$  a une unique expression sans  $\theta_i\theta_j$  avec  $j \geq i + 3$  ni  $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3}$ .*

Démonstration : Le système de réécriture sur  $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}^*$  défini par les règles  $\tau_i\tau_{j+1} \rightarrow \tau_j\tau_i$  pour  $i \geq 1$  et  $j \geq i + 2$  et  $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+3} \rightarrow \theta_{i+1}\theta_i\theta_{i+1}$  est convergent.  $\square$

- Corollaire : *Si  $H^+$  est simplifiable à gauche, il est simplifiable à droite.*

Démonstration : Analyser le passage de l'expression réduite de  $a$  à celle de  $a\theta_i$ ;  $\square$

- Proposition : *Le monoïde  $H^+$  est simplifiable à gauche et admet des ppcm à droite conditionnels.*

Démonstration : Appliquer la technique du «retournement de facteur».  $\square$

- Remarques : Il y a des éléments sans multiple à droite commun, par ex.  $\theta_2$  et  $\theta_1\theta_3$ .  
On ne sait rien d'éventuels ppcm à gauche.

- Lemme : Les éléments  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  admettent un ppcm à droite dans  $H^+$ , à savoir

$$\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2.$$

- Définition : (i)  $\Delta_n :=$  ppcm à droite de  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ .  
 (ii)  $S_n := \{ \text{diviseurs à gauche de } \Delta_n \}$   
 (iii) éléments **simples** de  $H^+ := \bigcup_{n \geq 1} S_n$ .

- Proposition : Tout élément non trivial de  $H^+$  a une unique décomposition  $s_1 | \dots | s_p$  avec  $s_1, \dots, s_p$  simples,  $s_p \neq 1$ , et

$$\forall s \text{ simple, } (s_i \prec s \Rightarrow s \nmid s_i s_{i+1} \dots s_p).$$

- Attention ! La forme normale existe, MAIS certaines propriétés des cas précédents sont en défaut car  $S$  non clos par diviseur à droite (pas de « règle du domino »).

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \theta_1\theta_2\theta_4 (= \Delta_3) \text{ est simple, mais } \theta_2\theta_4 \text{ ne l'est pas} \end{array}$$

- Question : Comment sont faits les simples de  $H^+$  ? Combien y en a-t-il ?

- Définition :  $S_{n,\ell} := \{a \mid a \preceq \Delta_n \text{ et } |a| = \ell\}$ ,  
 (type 0)  $S_{n,\ell}^0 := \{a \mid a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell\}$ ,  
 (type I)  $S_{n,\ell}^I := \{\theta_{n-1}a \mid a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 1\}$ ,  
 (type II<sub>1</sub>)  $S_{n,\ell}^{II_1} := \{\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid a \preceq \Delta_{n-1.5} \text{ et } |a| = \ell - 2\}$ ,  
 (type II<sub>2</sub>)  $S_{n,\ell}^{II_2} := \{\theta_{n-1}\theta_{n-2}\theta_{n-1}a \mid \theta_{n-2}a \preceq \Delta_{n-1} \text{ et } |a| = \ell - 3\}$ ,

avec  $\Delta_{n+0.5} := \theta_{n-1}\theta_n \cdot \theta_{n-2}\theta_{n-1} \cdot \theta_{n-3}\theta_{n-2} \cdot \dots \cdot \theta_2\theta_3 \cdot \theta_1\theta_2$ .

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \Delta_n \preceq \Delta_{n+0.5} \preceq \Delta_{n+1} \end{array}$$

- Proposition : Les ensembles  $S_{n,\ell}^0$ ,  $S_{n,\ell}^I$ ,  $S_{n,\ell}^{II_1}$ , et  $S_{n,\ell}^{II_2}$  partitionnent  $S_{n,\ell}$ .

Démonstration (difficile) : Analyser toutes les expressions de  $\Delta_n$  et de  $\Delta_{n+0.5}$ .  $\square$

- Faits :  $S_{n,\ell}^0 \leftrightarrow S_{n-1,\ell}$ ,  $S_{n,\ell}^I \leftrightarrow S_{n-1,\ell-1}$ ,  $S_{n,\ell}^{II_1} \sqcup S_{n,\ell}^{II_2} \leftrightarrow S_{n-1,\ell-2}$ .  
 ▶  $\text{card}(S_{n,\ell}) = \text{card}(S_{n-1,\ell}) + \text{card}(S_{n-1,\ell-1}) + \text{card}(S_{n-1,\ell-2})$ .

- Valeurs de  $\text{card}(S_{n,\ell})$ , lignes correspondant à  $n$ , avec  $\ell$  croissant :

				1	1					
			1	2	2	1				
			1	3	5	5	3	1		
		1	4	9	13	13	9	4	1	
	1	5	14	26	35	35	26	14	5	1

( $\approx$  suite 005773 de OEIS, «animaux dirigés»)

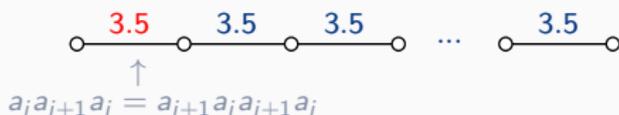
- Proposition : Pour tout  $n$ , on a  $\text{card}(S_n) = 2 \cdot 3^{n-2}$ .

- Proposition : Un élément de  $H^+$  est simple ssi son expression réduite évite les facteurs  $\theta_i^2$ ,  $\theta_i\theta_{i+2}$ ,  $\theta_i\theta_{i+1}\theta_i$ , et  $\theta_i\theta_{i+1}\theta_{i+2}$ .

Démonstration : Induction sur  $n$ , (très) délicate. □



- Définition (**AI-monoïdes** ou «monoïdes d'Artin-Krammer») :  $A_n :=$  monoïde associé au graphe de Dynkin



► relation de tresse de longueur mixte 3 et 4

- Proposition (**Krammer**) : Le monoïde  $A_n$  est simplifiable à gauche et possède un élément de Garside  $\Delta_n$ .
- Proposition (**Ffitch**) : Le nombre de diviseurs à gauche de  $\Delta_n$  dans  $A_n$  est **Fibo(2n)**.
- Références :
  - **D. Krammer**, *An asymmetric generalisation of Artin monoids*, Groups Complexity Cryptology 5 (2013) 141-168
  - **E. Ffitch**, *Generalisations of Artin monoids and Coxeter monoids*, PhD university of Warwick, 2019